OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14. 02. 2015

Clasa a XI – a

PROBLEMA 1. Fie matricea $A \in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(A+I_3) = \det(A+2I_3)$. Să se demonstreze că

$$2\det(A+I_3) + \det(A-I_3) + 6 = 3\det(A).$$

PROBLEMA 2. Se consideră matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & h_a h_b \\ 1 & b & h_b h_c \\ 1 & c & h_c h_a \end{pmatrix},$$

unde cu a, b, c se notează lungimile laturilor unui triunghi, iar cu h_a, h_b, h_c lungimile înălţimilor triunghiului. Să se arate că $\det A \geqslant 0$. În ce condiţii avem $\det A = 0$?

PROBLEMA 3. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{\sqrt{n^2+5n+9}\,\right\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real x.

PROBLEMA 4. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin $x_1 = 3$ şi $x_n = x_{n-1} + 2n + 1$, pentru $n \geq 2$.

a) Să se determine termenul general al şirului;

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\ln 2 + \ln\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x_{2k-1}}\right)\right)$.

[1]Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2]Toate problemele sunt obligatorii;
[3]Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 14. 02. 2015
BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI – a

PROBLEMA 1.

(2p) Considerăm funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=\det(A+xI_3)$ şi observăm că $f(x)=x^3+ax^2+bx+\det A$.

(2p) Din ipoteză, $f(1)=f(2)\Rightarrow 3a+b+7=0$

(1p) Avem $2\det(A+I_3)+\det(A-I_3)+6=2f(1)+f(-1)+6$

(2p) dar, $2f(1)+f(-1)+6=3\det A+(3a+b+7)=3\det A$.

PROBLEMA 2.

(2p) Dacă S este aria triunghiului, atunci: $2S=ah_a=bh_b=ch_c\Rightarrow h_a=\dfrac{2S}{a},\ h_b=\dfrac{2S}{b},\ h_c=\dfrac{2S}{c}$

(1p) $\det A=4S^2\cdot\begin{vmatrix}1 & a & \frac{1}{ab}\\ 1 & b & \frac{1}{bc}\\ 1 & c & \frac{1}{ca}\end{vmatrix}$

(2p) $\det A=4S^2\cdot\dfrac{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}{abc}=2S^2\cdot\dfrac{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2}{abc}\geqslant 0$

(2p) $\det A=0\Leftrightarrow a=b=c$

PROBLEMA 3.

(1p) Avem $\left\{\sqrt{n^2+5n+9}\right\}=\sqrt{n^2+5n+9}-\left[\sqrt{n^2+5n+9}\right]$

(3p) Dearece, $n+2<\sqrt{n^2+5n+9}<n+3,\ \forall\, n\geqslant 1$

(1p) obţinem că $\left[\sqrt{n^2+5n+9}\right]=n+2$

(2p) şi astfel, $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n^2+5n+9}\right\}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n+9}-(n+2)\right)=\dfrac{1}{2}$

PROBLEMA 4.

(1p) a) Din $x_n - x_{n-1} = 2n+1$, pentru $n \geq 2$

(3p) obţinem că $x_n = x_1 + \sum_{k=2}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (2k+1) = n(n+2)$

(2p) b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_{2k-1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) =$

$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1}$

(1p) şi astfel, $\lim_{n\to\infty} n \left(\ln 2 + \ln \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_{2k-1}} \right) \right) = \ln \left(\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^n \right) = \ln e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.