Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Locală - Maramureş, clasa a VIII-a

1. Se dă numărul $a = 1 + 3 + 5 + ... + 4025 + 2013$.

a) Calculați $[\sqrt{a}]$ unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului *x.*

b) Demonstrați inegalitatea:

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}} < 2014 \; .$$

prof. Popescu Ana

2. Fie *a, b, c* numere reale pozitive astfel încât $abc = 1$. Demonstrați că

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} \le \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

G.M. 9/2013

3. În cubul ABCDA’B’C’D’, M este mijlocul muchiei [DD’], DD’= a. Se cere:

a) Distanța de la B la planul (ACB’).

b) Distanța de la M la planul (ACB’).

prof. Popescu Mihai

4. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC, iar $D \in (BC)$. Dacă O_1 și O_2 sunt centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABD și ACD arătați că:

a) $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{R_1}{R_2}$ unde R_1 respectiv R_2 sunt razele celor două cercuri.

b) $\dfrac{S_{AO_1B}}{S_{AO_2C}} = \left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^2$.

c) $S_{ABC} \le 2 \cdot S_{AO_1DO_2}$. Când avem egalitate?

prof. Mihali Marinela

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Subiecte selectate şi prelucrate de: prof. Mihali Marinela Liceul Borşa, prof. Popescu Mihai Şc. Gim. Nr. 4 Borşa, prof. Popescu Ana, Şc. Gim. Nr. 9 Borşa

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN MARAMUREŞ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală
CLASA a VIII– a
Barem de corectare

Subiectul 1.
Se dă numărul $a=1+3+5+...+4025+2013$.
a) Calculați $\left[\sqrt{a}\right]$ unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului *x*.
b) Demonstrați inegalitatea:

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}<2014.$$

a)Avem $a=1+3+5+...+4025+2013=2013^2+2013=2013\cdot 2014$ **1p**

$2013^2<2013\cdot 2014<2014^2$ de unde $2013<\sqrt{2013\cdot 2014}<2014$ deci $\left[\sqrt{a}\right]=2013$ **2p**

b)Din a) avem că $\sqrt{a}<2014$ **1p**

$a+\sqrt{a}<2013\cdot 2014+2014 \Leftrightarrow a+\sqrt{a}<2014^2 \Leftrightarrow \sqrt{a+\sqrt{a}}<2014$ **1p**

Analog, se deduce că $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}<2014$ **2p**

Subiectul 2.
Fie *a*, *b*, *c* numere reale pozitive astfel încât $abc=1$. Demonstrați că

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\le\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Avem $\frac{a+b}{2}\ge\frac{2ab}{a+b}\ (m_a\ge m_h) \Leftrightarrow \frac{1}{a+b}\le\frac{a+b}{4ab}$ și analoagele **2p**

Se adună inegalitățile obținute și se folosește ipoteza $abc=1$.

$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\le\frac{c}{4}(a+b)+\frac{a}{4}(b+c)+\frac{b}{4}(a+c)=\frac{1}{2}(ab+ac+bc)$ **3p**

Finalizare $\frac{1}{2}(ab+ac+bc)\le\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$ (justificare) **2p**

Subiectul 3.
În cubul ABCDA'B'C'D', M este mijlocul muchiei [DD'], DD'= a. Se cere:
a) Distanța de la B la planul (ACB').
b) Distanța de la M la planul (ACB').

a)Fie $\{O\}=AC\cap BD$, conform teoremei celor trei perpendiculare avem $B'O\perp AC$ **1p**

Fie $BN\perp B'O,\ N\in(B'O)$ cu reciproca a doua a teoremei celor trei perpendiculare se arată că $BN\perp(AB'C)$

Deci, $d[B,(AB'C)]=BN$ **1p**

$B'O=\frac{a\sqrt{6}}{2}$, $BO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $BN=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **1p**

b) $MA=MC\Rightarrow\Delta MAC$ isoscel $\Rightarrow MO\perp AC$, $MO=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **1p**

Se calculează $MB'=\frac{3a}{2}$ și aplicând R.T. Pitagora în $\Delta MOB'\Rightarrow\Delta MOB'$ este dreptunghic cu

$m(MOB')=90^0\Rightarrow MO\perp OB'$ **2p**

Avem $MO\perp(AB'C)$ (justuficare) de unde $d[M,(AB'C)]=MO$ **1p**

Subiectul 4.
Fie triunghiul ascuțitunghic ABC, iar $D\in(BC)$. Dacă O_1 și O_2 sunt centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABD și ACD arătați că:

a) $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{R_1}{R_2}$

b) $\dfrac{S_{AO_1B}}{S_{AO_2C}}=\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^2$

c) $S_{ABC}\leq 2\cdot S_{AO_1DO_2}$. Când avem egalitate?

a)Pentru a poziționa punctul $D\in(BC)$, fie $AA'\perp BC$ iar $D\in(A'C)$. Dacă $D\in(A'B)$se tratează analog. Fie $[AF]$ și $[AE]$ diametre în cercurile $C(O_1,R_1)$ respectiv $C(O_2,R_2)$. Patrulaterele ADFB și ADCE sunt inscriptibile de unde $B\hat{A}F\equiv B\hat{D}F$ și $C\hat{A}E\equiv C\hat{D}E$ (1)…………………….... **1p**

Triunghiurile ADF și ADE dreptunghice, cu $m(A\hat{D}F)=90^0$, $m(A\hat{D}E)=90^0$ deci, $m(F\hat{D}E)=180^0\Rightarrow$ F, D, E coliniare $\Rightarrow B\hat{D}F\equiv C\hat{D}E$ (opuse la vârf) (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow B\hat{A}F\equiv C\hat{A}E$ ……………………………………………………………… **2p**

$\Delta ABF\approx\Delta ACE\ (UU)\Rightarrow\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AF}{AE}=\dfrac{BF}{CE}\Rightarrow\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{2R_1}{2R_2}$ de unde $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{R_1}{R_2}$ **1p**

b)Din punctul a) avem $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{R_1}{R_2}=\dfrac{AO_1}{AO_2}=\dfrac{BO_1}{CO_2}$ de unde

$\Delta AO_1B\approx\Delta AO_2C\ (LLL)\Rightarrow\dfrac{S_{AO_1B}}{S_{AO_2C}}=\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^2$ **2p**

c) $S_{ABC}=\dfrac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2}\leq\dfrac{2R_1\cdot 2R_2\cdot\sin A}{2}=4\cdot\dfrac{R_1R_2\sin A}{2}=4\cdot S_{AO_1O_2}=2\cdot S_{AO_1DO_2}$

Egalitatea se realizează când $AD\perp BC$ **1p**