OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
22 februarie 2014

CLASA A V-A

Subiectul I (7p)

a). Aflati numerele naturale a si b astfel incat $(a+b)(a-b-1)=2014$.
b). Exista a si b numere naturale astfel incat $(a^2+b^2+a+b)^2+(a^2+b^2-a-b)^2=2014$? Argumentati.

Subiectul II (7p)

a). Sa se scrie $a=10^{2014}$ ca suma de doua patrate perfecte.
b). Sa se scrie $b=6^{2015}$ ca suma de trei cuburi perfecte.

Subiectul III (7p)

Fie $M=\{2014,2015,2016,\ldots 2113\}$.
a). Sa se arate ca oricum am alege 51numere din multimea M , exista doua a caror suma este un numar prim.
b). Sa se arate ca exista doua multimi X si Y disjuncte cu proprietatea ca $X\cup Y=M$ si suma elementelor multimii X este egala cu suma elementelor multimii Y.
c). Sa se arate ca nu exista doua multimi X si Y disjuncte cu proprietatea ca $X\cup Y=M$ si produsul elementelor multimii X este egal cu produsul elementelor multimii Y.

Subiectul IV (7p)

Se considera 100 puncte pe un cerc. In fiecare punct se inscrie aleator cate un numar natural de la 1 la 100. Este posibil ca suma oricaror patru numere inscrise in patru puncte consecutive sa fie mai mica decat 203?
(GM. nr.5-2011)

Notă:

- **Toate subiectele sunt obligatorii**
- **Timp de lucru: 2 ore**

Str. Lacului, nr.19, Slobozia, Ialomiţa
Tel: 0243/231.825; 0372.705.073; Fax: 0243.231.825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICÃ
ETAPA LOCALÃ
22 februarie 2014

Clasa a V-a

Bareme de corectare

Subiectul I

a). Aflati numerele naturale a si b astfel incat (a+b)(a-b-1)=2014.

b). Exista a si b numere naturale astfel incat $(a^2+b^2+a+b)^2+(a^2+b^2-a-b)^2=2014$? Argumentati.

Barem:

a). $2014=2\cdot19\cdot53$, $D_{2014}=\{1,2,19,38,53,106,1007,2014\}$……………………..2p

a+b>a-b-1, rezulta ca avem urmatoarele patru cazuri:

i). a+b=2014 si a-b-1=1 cu solutia a=1008, b=1006.

ii). a+b=1007 si a-b-1=2 cu solutia a=505,b=502.

iii). a+b=106 si a-b-1=19 cu solutia a=63, b=43.

iv) a+b=53 si a-b-1=38 cu solutia a=46, b=7. …………………………………2p

b). $x= a^2+b^2+a+b=a(a+1)+b(b+1)=2k$, k numar natural
(produsul a doua nr. consecutive este numar par).

$y== a^2+b^2-a-b=a(a-1)+b(b-1)=2p$, p numar natural……………………………2p

Deci $x^2+y^2=(2k)^2+(2p)^2=4k^2+4p^2=M_4$. Dar $2014=M_4+2$, rezulta ca nu exista a si b numere naturale care sa verifice conditiile problemei………………………..1p

Str. Lacului, nr.19, Slobozia, Ialomiţa
Tel: 0243/231.825; 0372.705.073; Fax: 0243.231.825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro

Subiectul II

a). Sa se scrie $a=10^{2014}$ ca suma de doua patrate perfecte.

b). Sa se scrie $b=6^{2015}$ ca suma de trei cuburi perfecte.

Barem:

a). $10^2=6^2+8^2$……………………………………………………………1p

$10^{2014}=10^2\cdot10^{2012}=(6^2+8^2)\cdot(10^{1006})^2=(6\cdot10^{1006})^2+(8\cdot10^{1006})^2$ ……………..2p

b). $6^2=1^3+2^3+3^3$………………………………………………………….2p

$6^{2015}=6^2\cdot6^{2013}=(1^3+2^3+3^3)\cdot(6^{671})^3=(1\cdot6^{671})^3+(2\cdot6^{671})^3+(3\cdot6^{671})^3$…………..2p

Subiectul III

Fie M={2014,2015,2016,…2113}.

a). Sa se arate ca oricum am alege 51 numere din multimea M , exista doua a caror suma este un numar prim.

b). Sa se arate ca exista doua multimi X si Y disjuncte cu proprietatea ca

$X\cup Y=M$ si suma elementelor multimii X este egala cu suma elementelor multimii Y.

c). Sa se arate ca nu exista doua multimi X si Y disjuncte cu proprietatea ca

$X\cup Y=M$ si produsul elementelor multimii X este egal cu produsul elementelor multimii Y.

Barem:

a). cardM=2113-2014+1=100……………………………………………..1p

Consideram urmatoarele multimi: $M_1=\{2014,2113\}$, $M_2=\{2015,2112\}$, $M_3=\{2016,2111\}$,…$M_{50}=\{2063,2064\}$.

Suma elementelor fiecarei multimi este 4127 …………………………1p

Str. Lacului, nr.19, Slobozia, Ialomiţa
Tel: 0243/231.825; 0372.705.073; Fax: 0243.231.825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro

Avem 51 numere si 50 multimi, rezulta cu principiul cutiei ca exista doua numere in aceeasi multime deci exista doua numere cu suma 4127 care este nr. prim(se demonstreaza)……………………………………………………………1p

b). Consideram $X=M_1\cup M_2\cup M_3\cup\ldots M_{25}$ si $Y= M_{26}\cup M_{27}\cup M_{28}\cup\ldots M_{50}$

X si Y sunt disjuncte. Suma elementelor multimii X este egala cu suma elementelor multimii Y si este $4127\cdot 25$. Deci exista multimile cu proprietatea din enunt…………………………………………………………………….2p

c). Presupunem ca exista doua multimi X si Y cu proprietatea din enunt. Daca produsul elementelor multimii X este egal cu produsul elementelor multimii Y atunci produsul tuturor elementelor multimii M trebuie sa fie patrat perfect.

…………………………………………………………………………….1p

Dar $2014\cdot 2015\cdot\ldots\cdot 2113$ este divizibil cu 2113 si nu este divizibil cu 2113^2 deci nu este patrat perfect(se arata ca 2113 e prim)………………………………..1p

Deci nu exista doua multimi cu proprietatea din enunt.

Subiectul IV

Se considera 100 puncte pe un cerc. In fiecare punct se inscrie aleator cate un numar natural de la 1 la 100. Este posibil ca suma oricaror patru numere inscrise in patru puncte consecutive sa fie mai mica decat 203?

Barem:

Notam a_1, a_2, … a_{100} numerele corespunzatoare celor 100 de puncte de pe cerc.

Presupunem ca suma oricaror patru nr. inscrise in patru puncte consecutive este mai mica decat 203.

$a_1+a_2+a_3+a_4\leq 202$, $a_2+a_3+a_4+a_5\leq 202$, $a_3+a_4+a_5+a_6\leq 202$,…. $a_{97}+a_{98}+a_{99}+a_{100}\leq 202$,

$a_{98}+a_{99}+a_{100}+a_1\leq 202$, $a_{99}+a_{100}+a_1+a_2\leq 202$, $a_{100}+a_1+a_2+a_3\leq 202$. Adunand cele 100 relatii obtinem $4(a_1+a_2+a_3\ldots+a_{100})\leq 20200$, de unde $a_1+a_2+a_3\ldots+a_{100}\leq 5050$.

……………………………………………………………………………….2p

Str. Lacului, nr.19, Slobozia, Ialomiţa
Tel: 0243/231.825; 0372.705.073; Fax: 0243.231.825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro

Dar $a_1+a_2+a_3…+a_{100}=1+2+3+…+100=5050$. Egalitatea se obtine numai daca in toate cele 100 relatii scrise anterior avem egalitate. ………………………..3p

Deci , de exemplu : $a_1+a_2+a_3+a_4=202$, $a_2+a_3+a_4+a_5=202$ de unde rezulta $a_1=a_5$. Dar a_1, a_2, … a_{100} sunt distincte de unde rezulta contradictia. Presupunerea facuta este falsa. …………………………………………………………...2p

Conluzia:nu este posibil ca suma oricaror patru numere inscrise in patru puncte consecutive sa fie mai mica decat 203.