

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN PRAHOVA
OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
- ETAPA LOCALĂ, 16.02.2013 -
CLASA A XII-A
Subiecte

1. Fie $a > 0$ și mulțimea $I = [\sqrt{a}, \sqrt{3a}]$. Pe \mathbb{R} se definește operația "◦" astfel :

$$x \circ y = \sqrt{2a - \frac{(2a - x^2)(2a - y^2)}{a}}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Demonstrați că (I, \circ) este monoid comutativ.

b) Rezolvați ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_n = \sqrt{a}$, $n \in \mathbb{N}^*$ par.

Prof. Claudiu Militaru, Ploiești

2. a) Să se demonstreze inegalitatea $e^t \geq 1 + t + \frac{t^2}{2}$, pentru orice $t \geq 0$.

b) Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{tx} \cos x dx > \frac{17}{16}$.

Prof. Comeliu Mănescu-Avram, Ploiești

3. Pentru orice grup (G, \circ) și orice număr natural n nenul, notăm $A_n = \{x \in G \mid \text{ord } x = n\}$.

a) Dați un exemplu de grup G astfel încât $A_n \neq \emptyset$ pentru orice număr natural n nenul.

b) Găsiți G' astfel încât $A_{2n-1} \neq \emptyset$ pentru orice număr natural n nenul și $G' = \bigcup_{n \geq 1} A_{2n-1}$.

Prof. Emil Vasile, Ploiești

4. Determinați funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilă pe \mathbb{R} , care admite primitive și îndeplinește condițiile:

a) $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) $\int_0^6 f(x) dx = 90$.

Prof.dr. Cătălin Năchilă, Ploiești

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.