



Matematika tantárgyverseny
Megyei szakasz, 2013. március 9.

XI. OSZTÁLY

1. feladat. Az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozat növekvő és korlátos. Számítsd ki a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - a_1 - a_2)(2a_n - a_2 - a_3) \cdots (2a_n - a_{n-2} - a_{n-1})(2a_n - a_{n-1} - a_1).$$

határértéket!

Gazeta Matematică

2. feladat. Az A és B másodrendű négyzetes mátrixok teljesítik az

$$AB = A^2B^2 - (AB)^2 \quad \text{és} \quad \det(B) = 2$$

összefüggéseket.

- Igazold, hogy az A mátrix nem invertálható!
- Számítsd ki a $\det(A + 2B) - \det(B + 2A)$ különbséget!

3. feladat. Adott az A n -edrendű ($n > 1$) nem invertálható négyzetes mátrix. Az A elemei mind 1 modulusú komplex számok.

- Igazold, hogy ha $n = 3$, akkor az A mátrix két sorának vagy két oszlopának elemei egyenesen arányosak.
- Igaz-e az előző alpontbeli tulajdonság $n = 4$ esetén?

4. feladat. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy monoton függvény.

- Igazold, hogy f -nek minden $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban van jobb- és baloldali határértéke!
- Értelmezzük a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \lim_{t \nearrow x} f(t)$ függvényt, vagyis $g(x)$ az f függvény baloldali határértéke az x pontban. Igazold, hogy ha a g függvény folytonos, akkor az f függvény is folytonos!

Munkaidő 4 óra.

Minden feladatra 7 pont szerezhető.



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană și a Municipiului București, 9 Martie 2012

CLASA a XI-a

Problema 1. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir crescător și mărginit. Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - a_1 - a_2)(2a_n - a_2 - a_3) \cdots (2a_n - a_{n-2} - a_{n-1})(2a_n - a_{n-1} - a_1).$$

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie matricele de ordin 2 cu elemente reale A și B astfel încât

$$AB = A^2B^2 - (AB)^2 \quad \text{și} \quad \det(B) = 2.$$

- Arătați că matricea A nu este inversabilă.
- Calculați $\det(A + 2B) - \det(B + 2A)$.

Problema 3. Fie A o matrice neinvertibilă de ordin n , $n > 1$, cu elemente în mulțimea numerelor complexe, toate elementele având modulul egal cu 1.

- Arătați că pentru $n = 3$, două dintre liniile sau două dintre coloanele matricei A sunt proporționale.
- Rămâne adevărată concluzia de la punctul anterior pentru $n = 4$?

Problema 4. Se consideră o funcție monotonă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Demonstrați că f are limite laterale în fiecare punct $x_0 \in \mathbb{R}$.
- Definim funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \lim_{t \nearrow x} f(t)$, i.e. $g(x)$ este limita la stânga în punctul x . Arătați că dacă funcția g este continuă, atunci funcția f este continuă.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.