INSPECTORATUL
ŞCOLAR
JUDEȚEAN
SATU MARE

MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE

Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a IX-a

1. a) Es sei $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ und $x, y, z \in [a, b]$. Beweist dass, das aithmetische Mittel der Zahlen x, y und z auch in die Intervall $[a, b]$ sind.

b) Es sei A_1, A_2, A_3drei nicht kollinerae Punkten. Bezeichnet man $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{u}$ und $\overrightarrow{A_2A_3} = \vec{v}$. Für jedwelche $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 4$, bezeichnet man A_n der Schwerpunkt des Dreiecks $A_{n-1}A_{n-2}A_{n-3}$, aber für jede $n \in \mathbf{N}^*$, nimmt man $x_n, y_n \in \mathbf{R}$ so, dass $\overrightarrow{A_1A_n} = x_n\vec{u} + y_n\vec{v}$.

i. Berechnet x_6 und y_6.

ii. Zeigt, dass für jede $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 5$, gibt es $x_n \in \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$ und $y_n \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$.

Prof. Daly Marciuc

2. Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge die durch : $a_1 = \frac{1}{2}$und $a_{n+1} + a_n = \frac{2}{n^2+2n}$, $\forall n \geq 1$ defieniert ist.

a. Bestimmt die allgemeine Glied der Folge.

b. Berechnet die Summe $S = \sum_{k=1}^{n}(2k+1)a_k^2$und zeigt dass $S < 1$.

Prof. Traian Tămâian

3. Es sei das Parallelogramm $ABCD$ und G Schwerpunkt des Dreiecks ABC. Es sei der Punkt M auf die Strecke $[AD]$und der Punkt Dauf die Strecke $[NC]$. Zeigt, dass die Punkten G, M, N kollinear sind wenn und nur wenn $\frac{CN}{ND} - \frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$.

Gazeta Matematică

4. Im Dreieck ABC mit m$(\sphericalangle ACB) = 90°$, nehmen die Punkten M∈(BC), Q∈(AB) bzw. N∈(AC) so, dass MQNC Rechteck sei. Wenn die Punkten I und G die Mitellpunkt des Inkreises des

Str. 1 Decembrie 1918 nr. 6
Cod 440010 Satu Mare
Tel. +40 (0)261712175
Fax: +40 (0)261713441
www.isj.sm.edu.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a IX-a

Barem de corectare

1. a. Demonstrarea proprietății – **2p**. b. Găsirea relației de recurență şi a primilor trei termeni ai şirurilor – **1p**.

$x_4 = \frac{2}{3}$, $y_4 = \frac{1}{3}$, $x_5 = \frac{8}{9}$, $y_5 = \frac{4}{9}$, $x_6 = \frac{23}{27}$, $y_6 = \frac{16}{27}$ – **2p**

$x_5, x_6, x_7 \in \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$ şi $y_5, y_6, y_7 \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$ – **1p**

Demonstrarea prin inducție – **1p**.

2. **a)** $a_2 = \frac{1}{2 \cdot 3}$ şi $a_3 = \frac{1}{3 \cdot 4}$ **1p**

P(n) : $a_n = \frac{1}{n \cdot (n+1)}$ **1p**

Demonstrația prin inducție **2p**

b) S $= \sum_{1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1$ **3p**

3. A,I,G coliniare dacă şi numai dacă $\exists \propto \in \mathbb{R}$ $, \overrightarrow{AG} = \propto \overrightarrow{AI}$ **1p**

$\overrightarrow{AI} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$ **1p**

$\overrightarrow{AL} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$, AI$\cap BC = \{L\}$ **1p**

Notăm AQ $= x$, $\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{c}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ **1p**

$\overrightarrow{AG} = \propto \overrightarrow{AI}$ devine $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{c}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) - \frac{\propto b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{\propto c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$ **1p**

$\frac{x}{2c} = \frac{\propto b}{a+b+c}$ şi $\frac{1}{2} = \frac{\propto c}{a+b+c}$ **1p**

Deci raportul lor va fi $\frac{x}{c} = \frac{b}{c}$ adică x $=$ b, AQ $=$ AC.

4. Fixarea reperului $\overrightarrow{AD} - \vec{u}$, $\overrightarrow{AB} - \vec{v}$ – 1p

Str. 1 Decembrie 1918 nr. 6
Cod 440010 Satu Mare
Tel. +40 (0)261712175
Fax: +40 (0)261713441
www.isj.sm.edu.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

$\frac{CN}{ND} = k_1$, $\frac{AM}{MD} = k_2$; punctele G , M si N sunt coliniare dacă şi numai dacă

$\overrightarrow{AM} = \propto \overrightarrow{AG} + (1 - \propto)\overrightarrow{AN}$ – 1p;

$\overrightarrow{AM} = \frac{k_2}{1 - k_2}$ – 1p; $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$ – 1p; $\overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AC} - k_1\overrightarrow{AD}}{1 - k_1} = \vec{u} + \frac{1}{1 - k_1}\vec{v}$ – 1p;

$k_1 - k_2 = \frac{1}{2}$ – 2p.

Dreiecks ABC, bzw Mitellpunkt des Rechtecks MQNC sind, beweist dass die Punkten A, I, G kollinear sind wenn und nur wenn AQ = AC.

Prof. Alexandru Blaga