Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a VIII-a

1.a) Fie x, y numere reale astfel încât $9x^2+25y^2-6x\sqrt{3}-10y\sqrt{5}+8=0$.

Arătați că: $x^2 - y^2 = 2x^2y^2$.

prof. Gheorghe Moldovan, Medieşu Aurit

b) Dacă x,y,z, t ∈R, să se arate că $xy(z^2-t^2)^2 \geq (xz^2-yt^2)(yz^2-xt^2)$.

prof. Ovidiu Pop, C.N.”M.Eminescu”

2 .a) Arătați că: $x = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}} \in N$

prof. Monica Amic, Acâş

b) i)Arătați că produsul succesorilor a două pătrate perfecte se poate scrie ca suma a două pătrate perfecte.

ii) Folosind eventual i) arătați că $(a^2+1)(b^2+1) \geq 2(ab-1)(a+b)$, oricare ar fi a şi b numere naturale nenule.

prof. Bud Adrian, Negreşti-Oaş

3. Pe planul pătratului ABCD, cu AB = 6 cm se ridică perpendicularele MD şi NC situate în acelaşi semiplan astfel încât MD= 6cm, NC=9 cm.

a) Demonstrați că punctele A, B, N şi M sunt necoplanare;

b) Determinați distanța de la punctul M la AC;

c) Dacă O este punctul de intersecție a diagonalelor pătratului ABCD, demonstrați că $MN \perp MO$ şi aflați aria triunghiului OMN.

prof. Adriana Boroş, Livada

4. Fie SABCD o piramidă patrulateră regulată. AM este perpendiculară pe SB, M∈ SB, BN este perpendiculară pe SC, N∈ SC, CP este perpendiculară pe SD, P∈ SD, DQ este perpendiculară pe SA, Q ∈ SA şi R este simetricul lui N față de AC.

a) Demonstrați că punctele B, R, Q, D sunt coplanare

b) Aflați măsura unghiului dintre dreptele MP şi RQ.

Gazeta Matematică nr.11/2012

Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a VIII-a

Barem de corectare

1. a) $(3x-\sqrt{3})^2+(5y-\sqrt{5})^2=0$ 2p

$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ si $y=\frac{\sqrt{5}}{5}$ 1p

Finalizare 1p

b) Inegalitatea din enunț este echivalentă cu

$xyz^4-2xyz^2t^2+xyt^4\ge xyz^4-x^2z^2t^2-y^2z^2t^2+xyt^4$ .... 2p.

Echivalent cu $z^2t^2(x-y)^2\ge 0$ 1p

2. a) $x=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}}$

- după raționalizarea numitorilor obținem

$\frac{1-\sqrt{2}}{1-2}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{3-4}+\dots+\frac{\sqrt{2024}-\sqrt{2025}}{2024-2025}=$

.... 1p

$=-1+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{4}-\sqrt{4}+\dots-\sqrt{2024}+\sqrt{2025}=$ 1p

$=-1+45=44\in\mathbb{N}$ $(\sqrt{2025}=45)$............................1p

b) i) $(a^2+1)(b^2+1)=a^2b^2+a^2+b^2+1$ 1p

$=(ab-1)^2+(a+b)^2$ 1p

ii) $(a^2+1)(b^2+1)=(ab-1)^2+(a+b)^2\ge 2\sqrt{(ab-1)^2(a+b)^2}$ 1p

$=2(ab-1)(a+b)$ 1p

3. a) Presupunem prin absurd că A, M, N, B sunt coplanare. Obținem că MN || AB, contradicție...2p

Str. 1 Decembrie 1918 nr. 6
Cod 440010 Satu Mare
Tel. +40 (0)261712175
Fax: +40 (0)261713441
www.isj.sm.edu.ro

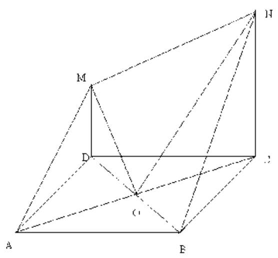
Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

b) Folosind teorema celor trei perpendiculare, se obține d (M, AC)= MO. 1p

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic MDO obținem MO= $3\sqrt{6}$ cm............1p

c)Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic NCO obținem NO = $3\sqrt{11}$ cm..........1p

In trapezul dreptunghic MNCD se obține MN = $3\sqrt{5}$ cm..1p



Conform reciprocii teoremei lui Pitagora triunghiul MON este dreptunghic deci MN$\perp$MO. Daca triunghiul MON este dreptunghic, atunci $A_{MON} = \frac{MN \cdot MO}{2} = \frac{9\sqrt{30}}{2} cm^2$ 1p

4. a)SABCD – piramidă patrulateră regulată $\Rightarrow$AQ$\equiv$ NC

Fie QE perpendicular pe AC, deci AE$\equiv$ CF, OE $\equiv$ OF, EQ$\equiv$ NF , NF este perpendicular pe AC, QE|| NF,…………………...……………………………………………………1p

Deci EQFR este paralelogram…………………………………………………………………………………1p

RQ$\cap$ EF= {O}, QR$\cap$ BD= {O} deci B,R,Q , D sunt coplanare………………………………………………1p

b)BM$\equiv$ DP, SBD triunghi isoscel, deci PM|| BD…………………………………………...…………1p

Unghiului dintre dreptele MP şi RQ este congruent cu unghiului dintre dreptele BD şi RQ……1p

BD este perpendicular pe planul (ASC) şi OQ inclusă în planul (ASC), deci BD este perpendicular

pe OQ…………………………………………………………………………………………………1p

Deci, măsura unghiului dintre dreptele MP şi RQ este 90°…………………………………………………..1p