INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN PRAHOVA

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

- ETAPA LOCALĂ, 16.02.2013 –

CLASA A XI-A

Subiecte

1. Fie matricele $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determinați matricele $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ care verifică relațiile : $X + AY = 2I_2$ şi $BXYX + Y^2X = 2B$.

Prof. Gabriel Necula, Breaza

2. a) Fie a un număr real. Arătați că , pentru orice număr natural $n > |a|$, $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \geq 1+a$

b) Arătaţi că, pentru orice număr real x, $e^x \geq 1+x$.

Gazeta Matematică

3. Fie şirurile: $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $x_{n+1} = x_n - ax_n^2$, unde $a \geq 2$ şi $y_n = nx_n, n \geq 1$.

Determinați limitele şirurilor $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$.

Prof. Petre Năchilă, Ploieşti

4. Considerăm şirurile: $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = [\ln n]$ şi $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ definit prin determinantul

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n^2-n+1} & a_{n^2-n+2} & \dots & a_{n^2} \end{vmatrix}$$

a) Arătaţi că există un rang $k \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice număr n natural, $n > k$, să avem $a_{n^2} - a_n \leq \frac{n-3}{2}$.

b) Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta_n = 0$.

(am notat cu $[t]$ – partea întreagă a lui t)

Prof. Emil Vasile, Ploieşti

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolşvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

ISJ Prahova