Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală – Vaslui, 15 februarie 2015

Clasa a V-a

Problema 1. Aflați numărul natural $\overline{aa}$ pentru care: $2\cdot\overline{aa}^2+2\cdot a^3+2\cdot a^2-a=2\cdot 2014$.

Gazeta Matematică

Problema 2. Suma a trei numere naturale este 2015. Aflați cele trei numere, știind că dacă adunăm 11 la primul, scădem 11 din al doilea, împărțim la 11 pe al treilea număr, se obține de fiecare dată același număr.

Problema 3. Fie numerele naturale a şi b care verifică egalitățile:

$a-4=3\cdot\left(4+4^2+...+4^{2014}\right)$ şi $b-8=5\cdot\left(6+6^2+...+6^{2015}\right)$.

Arătaţi că: *i)* a este pătrat perfect;

ii) b nu este pătrat perfect.

Problema 4. Se consideră șirul de numere: 3, 7, 11, 15, 19, ….

a) Explicați regula de formare a termenilor șirului și aflați următorii trei termeni;

b) Stabiliți dacă numărul 2015 este termen al șirului;

c) Calculați suma primilor 100 de termeni ai șirului.

Notă. Timp de lucru 2 ore.

Fiecare subiect se notează de la 1 la 7 puncte.

Din oficiu se acordă 4 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală – Vaslui, 15 februarie 2015

Soluții și bareme orientative - Clasa a V-a

Problema 1. Aflați numărul natural $\overline{aa}$ pentru care: $2\cdot\overline{aa}^2+2\cdot a^3+2\cdot a^2-a=2\cdot 2014$.

Gazeta Matematică

Soluția 1. 1p din oficiu

$2\cdot(10a+a)^2+2\cdot a^3+2\cdot a^2-a=2\cdot 2014$ **(0,5p)**

$2\cdot 121\cdot a^2+2\cdot a^3+2\cdot a^2-a=2\cdot 2014$ **(1p)**

$2\cdot a^3+244\cdot a^2-a=2\cdot 2014$ **(1p)**

$a\cdot(2\cdot a^{2+}244\cdot a-1)=2^2\cdot 19\cdot 53$ **(2p)**

Cum a este cifră, obținem a=4 **(1p)**

Finalizare: $\overline{aa}=44$. **(0,5p)**

Soluția 2. 1p din oficiu

$2\cdot(10a+a)^2+2\cdot a^3+2\cdot a^2-a=2\cdot 2014$ **(0,5p)**

$2\cdot 121\cdot a^2+2\cdot a^3+2\cdot a^2-a=2\cdot 2014$ **(1p)**

$2a^3+244a^2-2\cdot 2014=a$ **(0,5p)**

$2(a^3+122a^2-2014)=a$ **(0,5p)**

$2\,|\,a$ și a cifră nenulă $\Rightarrow a\in\{2;4;6;8\}$ **(1p)**

Verifică relația de mai sus doar a=4. **(2p)**

Finalizare : $\overline{aa}=44$. **(0,5p)**

Problema 2. Suma a trei numere naturale este 2015. Aflați cele trei numere, știind că dacă adunăm 11 la primul, scădem 11 din al doilea, împărțim la 11 pe al treilea număr, se obține de fiecare dată același număr.

Soluție. Fie a, b, c cele trei numere naturale. **1p din oficiu**

a+b+c=2015

a+11=x → a=x-11

b-11=x → b=x+11

c:11=x → c=11x **(3p)**

Înlocuind în prima relație, obținem:

x-11+x+11+11x=2015

13x=2015

x=155 **(2p)**

Finalizare: a=144, b=166, c=1705. **(1p)**

Problema 3. Fie numerele naturale a şi b care verifică egalităţile:

$a-4=3\cdot\left(4+4^2+...+4^{2014}\right)$ şi $b-8=5\cdot\left(6+6^2+...+6^{2015}\right)$.

Arătaţi că: *i)* a este pătrat perfect;

ii) b nu este pătrat perfect.

Soluție. ***i)*** Notăm: $S=4+4^2+\ldots+4^{2014}/\cdot 4$ **1p din oficiu**

$4S=4^2+\ldots+4^{2015}$

Scădem relațiile și obținem: $3S=4^{2015}-4$ **(2p)**

Obs. Se poate utiliza și formula pentru suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice.

Cum a-4=3S, obținem $a-4=4^{2015}-4$**.** **(1p)**

Deci, $a=4^{2015}=(2^2)^{2015}=(2^{2015})^2$. Rezultă că a este pătrat perfect. **(1p)**

ii) Scoatem factor comun pe 6 și obținem:

$b-8=5\cdot 6\cdot(1+6+\ldots+6^{2014})$

$b=30\cdot(1+6+\ldots+6^{2014})+8$ **(1p)**

$U(30\cdot(1+6+\ldots+6^{2014}))=0$ → U(b)=8 și cum un număr natural care are ultima cifră 2, 3, 7 sau 8 nu este pătrat perfect → b nu este pătrat perfect. **(1p)**

Problema 4. Se consideră șirul de numere: 3, 7, 11, 15, 19, ….

a) Explicați regula de formare a termenilor șirului și aflați următorii trei termeni;

b) Stabiliți dacă numărul 2015 este termen al șirului;

c) Calculați suma primilor 100 de termeni ai șirului.

Soluție. 1p din oficiu

a) Un termen din şir se obţine adunând 4, la precedentul acestuia. **(0,5p)**

Următorii trei termeni din şir sunt: 23, 27, 31 **(0,5p)**

b) $a_1= 3=4\cdot 0+3$

$a_2= 7=4\cdot 1+3$

$a_3=11=4\cdot 2+3$

$a_4=15=4\cdot 3+3$

……………..

$a_k=4\cdot(k-1)+3$ **(2p)**

Cum $2015=4\cdot 503+3$, rezultă că 2015 este termen al şirului. **(1p)**

Obs. Sau se rezolvă ecuația $a_k = 2015 \Rightarrow k = 504 \Rightarrow a_{504} = 2015$.

c) $a_{100}=4\cdot 99+3$ **(1p)**

$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{100}=$

$=4\cdot 0+3+4\cdot 1+3+4\cdot 2+3+\ldots+4\cdot 99+3$

$=4\cdot(1+2+3+\ldots+99)+3\cdot 100$

$=4\cdot 99\cdot 100:2+300$

$=20100$ **(1p)**

Obs. Se poate utiliza şi formula pentru suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice.