

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
21 februarie 2016

CLASA a IX-a

1. Să se determine funcțiile $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, dacă

$$f(1) - 2f(2) + 3f(3) - 4f(4) + \dots + (-1)^{n-1} nf(n) = \frac{(-1)^{n-1} nf(n+1)}{2},$$

pentru orice număr natural $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ fixat. Rezolvați ecuația: $\left\{x + \frac{1}{2n}\right\} + \left\{x + \frac{3}{2n}\right\} + \dots + \left\{x + \frac{2n-1}{2n}\right\} = \frac{n(2x-1)}{2}$.

3. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir strict crescător de numere reale. Să se arate că dacă pentru orice număr natural $k \geq 3$, mulțimea $A_k = \{a_j - a_i \mid 1 \leq i < j \leq k\}$ are $k-1$ elemente, atunci $(a_n)_{n \geq 1}$ formează o progresie aritmetică.

4. Fie triunghiul ABC și punctele R, P, N, Q cu proprietatea că $\overline{RB} = 3\overline{AR}$, $\overline{AP} = 3\overline{PB}$, $\overline{BC} = 2\overline{CQ}$, $\overline{AN} = 2\overline{NC}$. Dacă M este mijlocul segmentului $[BC]$ și T este simetricul lui M față de N , demonstrați că dreptele RQ , PT și AC sunt concurente.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.

3. Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 21 februarie 2016
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE-CLASA a IX-a

1. Să se determine funcțiile $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, dacă $f(1) - 2f(2) + 3f(3) - 4f(4) + \dots + (-1)^{n-1}nf(n) = \frac{(-1)^{n-1}nf(n+1)}{2}$,

pentru orice număr natural $n \in \mathbb{N}^*$.

Dan Popescu, Suceava

Soluție: Dacă $f(1) = a \in \mathbb{N}^*$, pentru $n=1$ în enunț, se deduce că $f(2) = 2a$.

Cum și $f(1) - 2f(2) + 3f(3) - 4f(4) + \dots + (-1)^{n-2}(n-1)f(n-1) = \frac{(-1)^{n-2}(n-1)f(n)}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, cu relația din enunț,

se deduce că $\frac{(-1)^{n-1}nf(n+1)}{2} = (-1)^{n-1}nf(n) + \frac{(-1)^{n-2}(n-1)f(n)}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Găsim $(n+1)f(n) = nf(n+1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Așa că, în ipoteza inductivă $f(n) = an$, ultima relație asigură $f(n+1) = a(n+1)$, ceea ce conduce la $f(n) = an$,

$\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Barem:

Deduce $f(2)$ în funcție de $f(1)$	1p
Găsește relația între $f(n)$ și $f(n+1)$	2p
Demonstrează inductiv că $f(n) = nf(1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$	4p

2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ fixat. Rezolvați ecuația: $\left\{x + \frac{1}{2n}\right\} + \left\{x + \frac{3}{2n}\right\} + \dots + \left\{x + \frac{2n-1}{2n}\right\} = \frac{n(2x-1)}{2}$.

Supliment G.M.12/2015

Soluție. Ecuația este echivalentă cu: $nx + \frac{1+3+\dots+(2n-1)}{2n} - \left(\left[x + \frac{1}{2n}\right] + \left[x + \frac{3}{2n}\right] + \dots + \left[x + \frac{2n-1}{2n}\right]\right) = nx - \frac{n}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[x + \frac{1}{2n}\right] + \left[x + \frac{3}{2n}\right] + \dots + \left[x + \frac{2n-1}{2n}\right] = n$. Dacă notăm cu $f(x) = \left[x + \frac{1}{2n}\right] + \left[x + \frac{3}{2n}\right] + \dots + \left[x + \frac{2n-1}{2n}\right]$, atunci

$f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ și $f(x) = n, \forall x \in \left[\frac{2n-1}{2n}, \frac{2n+1}{2n}\right)$, deci f este constantă pe fiecare interval de lungime $\frac{1}{n}$

de forma $I_n = \left[\frac{2n-1}{2n}, \frac{2n+1}{2n}\right), n \geq 1$. Cum f este funcție crescătoare, rezultă că mulțimea soluțiilor ecuației este I_n .

Barem.

Deduce $\left[x + \frac{1}{2n}\right] + \left[x + \frac{3}{2n}\right] + \dots + \left[x + \frac{2n-1}{2n}\right] = n$	3p
Rezolvă și găsește mulțimea soluțiilor	4p

3. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir crescător de numere reale. Să se arate că dacă pentru orice număr natural $k \geq 3$, mulțimea $A_k = \{a_j - a_i \mid 1 \leq i < j \leq k\}$ are $k-1$ elemente, atunci $(a_n)_{n \geq 1}$ formează o progresie aritmetică.

Cristian Amorăriței, Suceava

Soluție. $a_1 < a_2 < \dots < a_k \Rightarrow a_2 - a_1 < a_3 - a_1 < \dots < a_k - a_1 \Rightarrow A_k = \{a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_k - a_1\}$

Dar $a_3 - a_2 < a_4 - a_2 < \dots < a_k - a_2 < a_k - a_1 \Rightarrow A_k = \{a_3 - a_2, a_4 - a_2, \dots, a_k - a_2, a_k - a_1\}$

Deducem că $a_2 - a_1 = a_3 - a_2, a_3 - a_1 = a_4 - a_2, \dots, a_{k-1} - a_1 = a_k - a_2 \Rightarrow a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_k - a_{k-1}$, deci numerele a_1, a_2, \dots, a_k sunt în progresie aritmetică. Într-adevăr, în acest caz $A_k = \{r, 2r, \dots, (k-1)r\}$, unde am notat cu r rația progresiei. Cum proprietatea este adevărată pentru orice $k \geq 3$, rezultă concluzia.

Barem.

$a_1 < a_2 < \dots < a_k \Rightarrow a_2 - a_1 < a_3 - a_1 < \dots < a_k - a_1 \Rightarrow A_k = \{a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_k - a_1\}$	2p
$a_3 - a_2 < a_4 - a_2 < \dots < a_k - a_2 < a_k - a_1 \Rightarrow A_k = \{a_3 - a_2, a_4 - a_2, \dots, a_k - a_2, a_k - a_1\}$	2p
Deduce $a_2 - a_1 = a_3 - a_2, a_3 - a_1 = a_4 - a_2, \dots, a_{k-1} - a_1 = a_k - a_2 \Rightarrow a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_k - a_{k-1}$	2p
Finalizare	1p

4. Fie triunghiul ABC și punctele R, P, N, Q cu proprietatea că $\overline{RB} = 3\overline{AR}$, $\overline{AP} = 3\overline{PB}$, $\overline{BC} = 2\overline{CQ}$, $\overline{AN} = 2\overline{NC}$. Dacă M este mijlocul segmentului $[BC]$ și T este simetricul lui M față de N , demonstrați că dreptele RQ , PT și AC sunt concurente.

Andrei Anca, Suceava

Soluție. Notăm $AC \cap RQ = \{S\}$. Aplicăm teorema lui Menelaus triunghiului ABC și punctelor coliniare R, S, Q și obținem $\frac{RA}{RB} \cdot \frac{QB}{QC} \cdot \frac{SC}{SA} = 1 \Rightarrow \frac{SC}{SA} = 1 \Rightarrow S$ este mijlocul segmentului $[AC]$. Arătăm că punctele P, S, T sunt coliniare.

$$\overline{PS} = \frac{1}{2}(\overline{PA} + \overline{PC}) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\overline{BA} + \overline{PB} + \overline{BC}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\overline{BA} - \frac{1}{4}\overline{BA} + \overline{BC}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overline{BA} + \overline{BC}\right);$$

$$\overline{PT} = \overline{PM} + \overline{MT} = \overline{PB} + \overline{BM} + 2\overline{MN} = -\frac{1}{4}\overline{BA} + \frac{1}{2}\overline{BC} + 2(\overline{MC} + \overline{CN}) = -\frac{1}{4}\overline{BA} + \frac{1}{2}\overline{BC} + 2\left(\frac{1}{2}\overline{BC} + \frac{1}{3}\overline{CA}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\overline{BA} + \frac{1}{2}\overline{BC} + \overline{BC} + \frac{2}{3}(\overline{BA} - \overline{BC}) = \frac{5}{12}\overline{BA} + \frac{5}{6}\overline{BC} = \frac{5}{6}\left(\frac{1}{2}\overline{BA} + \overline{BC}\right) = \frac{5}{3}\overline{PS} \Rightarrow \overline{PT} = \frac{5}{3}\overline{PS} \Rightarrow P, S, T \text{ coliniare}$$

$$\Rightarrow RQ \cap PT \cap AC = \{S\}.$$

Barem.

RQ trece prin mijlocul lui $[AC]$	3p
PT trece prin mijlocul lui $[AC]$	4p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.