Olimpiada Naţională de Matematică 2015

Etapa locală – Iaşi, 23 ianuarie 2015

CLASA a VII-a

Subiect 1

Demonstraţi că media aritmetică a primelor k numere naturale pare consecutive şi cea a primelor k numere naturale impare consecutive sunt numere naturale consecutive, unde $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Subiect 2

a) Demonstraţi că dacă m şi n sunt numere raţionale şi $m\sqrt{3}+n\sqrt{2}=0$, atunci $m=0$ şi $n=0$.

b) Arătaţi că $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+\ldots+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{\sqrt{72}}=\frac{2}{3}$.

c) Determinaţi numerele $a \in \mathbb{Q}$ şi $b \in \mathbb{Z}$, astfel încât

$$\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+\ldots+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{\sqrt{72}}\right)\cdot a\sqrt{2}+\left[\frac{\sqrt{b^2+20}}{2}\right]\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{50}}{3}+a\sqrt{12},$$

unde prin $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului x.

Subiect 3

Se consideră un paralelogram $ABCD$ şi se notează cu M, N şi O mijloacele segmentelor AD, BC, respectiv AN. Fie $BP \perp CM$, $P \in CM$.

a) Demonstraţi că patrulaterul $ANCM$ este paralelogram.

b) Demonstraţi că $[AP] \equiv [AB]$.

c) Determinaţi măsura unghiului BAD, ştiind că $2OP = AN$.

Subiect 4

În triunghiul oarecare ABC, se consideră M şi N mijloacele segmentelor BC, respectiv AM, punctul D simetricul punctului C faţă de A, $BN \cap AC=\{S\}, DM \cap AB=\{T\}$ şi punctul P mijlocul segmentului SC.

a) Demonstraţi că $AC=3PC$.

b) Demonstraţi că dreptele ST şi BC sunt paralele.

c) Calculaţi aria triunghiului ANS, ştiind că aria triunghiului ABC este egală cu $48\ \text{cm}^2$.

Notă *Timp de lucru 3 ore.*
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

Clasa a VII-a

Barem

Subiect 1 Demonstrați că media aritmetică a primelor k numere naturale pare consecutive și cea a primelor k numere naturale impare consecutive sunt numere naturale consecutive, unde $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Popa Claudiu- Ștefan

Soluție și barem

Primele k numere naturale pare consecutive sunt: $0, 2, 4, ..., 2\cdot(k-1)$ 1p

$0+2+4+......+2\cdot(k-1)=k\cdot(k-1) \Rightarrow \dfrac{0+2+.....+2\cdot(k-1)}{k}=k-1$ 2p

Primele k numere naturale impare consecutive sunt: $1, 3, 5, ..., 2k-1$ 1p

$1+3+5+.......+(2k-1)=k^2 \Rightarrow \dfrac{1+3+......+(2k-1)}{k}=k$ 2p

$k-1$ și k sunt numere naturale consecutive.. 1p

Subiect 2 a) Demonstrați că dacă m şi n sunt numere raționale și $m\sqrt{3}+n\sqrt{2}=0$, atunci $m=0$ şi $n=0$.

b) Arătați că $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+...+\dfrac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{\sqrt{72}}=\dfrac{2}{3}$.

c) Determinați numerele $a \in \mathbb{Q}$ şi $b \in \mathbb{Z}$,, astfel încât

$$\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+...+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{\sqrt{72}}\right)\cdot a\sqrt{2}+\left[\frac{\sqrt{b^2+20}}{2}\right]\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{50}}{3}+a\sqrt{12},$$

unde prin $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului x.

Anița Alice

Soluție și barem

a) $m\sqrt{3}+n\sqrt{2}=0\,\big|\cdot\sqrt{2} \Leftrightarrow m\sqrt{6}+2n=0 \Leftrightarrow m\sqrt{6}=-2n$ 1p

$$\left.\begin{array}{l}\text{Dacă } m\neq 0,\text{ atunci } \sqrt{6}=-\dfrac{2n}{m} \text{ ar fi număr rațional (fals)}\\ \text{Dacă } m=0,\text{ atunci } n=0\end{array}\right\} \text{.. 1p}$$

b) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+...+\dfrac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{\sqrt{72}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{12}}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+...+\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{72}}-\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{72}}$ 1p

$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{8}}-\frac{1}{\sqrt{9}}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ 1p

c) Folosind b), egalitatea din enunţ se mai scrie $\frac{2a\sqrt{2}}{3}+\left[\frac{\sqrt{b^2+20}}{2}\right]\cdot\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{2}}{3}+2a\sqrt{3}$ 1p

$$\left(\frac{2a}{3}-\frac{5}{3}\right)\sqrt{2}+\left(\left[\frac{\sqrt{b^2+20}}{2}\right]-2a\right)\sqrt{3}\overset{a)}{=}0\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{5}{2}\\ \left[\frac{\sqrt{b^2+20}}{2}\right]=5\end{cases}$$ 1p

$5\le\frac{\sqrt{b^2+20}}{2}<6\Leftrightarrow 10\le\sqrt{b^2+20}<12\Leftrightarrow 100\le b^2+20<144\Leftrightarrow 80\le b^2<124$

$\Leftrightarrow b^2\in\{81,100,121\}\Leftrightarrow b\in\{\pm 9,\pm 10,\pm 11\}$ 1p

Subiect 3 Considerăm un paralelogram $ABCD$ şi notăm cu M, N şi O mijloacele segmentelor AD, BC, respectiv AN. Fie $BP\perp CM$, $P\in CM$.

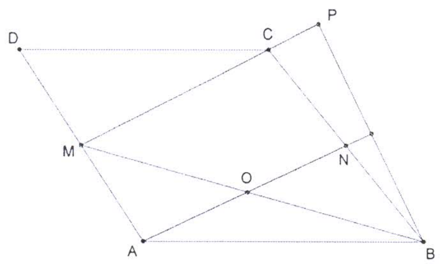
a) Arătaţi că patrulaterul $ANCM$ este paralelogram.

b) Demonstraţi că $[AP]\equiv[AB]$.

c) Determinaţi măsura unghiului BAD, ştiind că $2OP=AN$.

Zanoschi Adrian

Soluţie şi barem



a) Deoarece $ABCD$ este paralelogram rezultă că $AD\parallel BC$ şi $AD=BC$, deci $AM\parallel CN$ şi $AM=CN$, de unde reiese că $ANCM$ este paralelogram.. 3p

b) Cum $AN\parallel MP$ (căci $ANCM$ este paralelogram) şi $MP\perp BP$ rezultă că $AN\perp BP$. Pe de altă parte, din relaţiile $AN\parallel CP$ şi $BN=NC$ rezultă că dreapta AN trece prin mijlocul segmentului BP. Prin urmare, AN este mediană şi înălţime în triunghiul ABP, cea ce înseamnă că $[AP]\equiv[AB]$ 2p

c) Întrucât $AMNB$ este paralelogram, punctul O este şi mijlocul segmentului BM, deci PO este mediana corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul dreptunghic BMP. Astfel, $2OP = MB$ și, cum $2OP = AN$, rezultă că $MB = AN$, deci $AMNB$ este dreptunghi. Așadar, $m(\angle BAD) = m(\angle BAM) = 90^\circ$ 2p

Subiect 4 În triunghiul oarecare ABC, se consideră M și N mijloacele segmentelor BC, respectiv AM, punctul D simetricul punctului C față de A, $BN \cap AC = \{S\}, DM \cap AB = \{T\}$ și punctul P mijlocul segmentului SC.

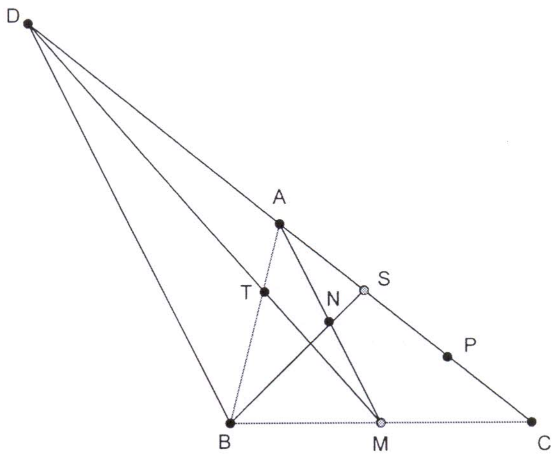
a) Arătați că $AC = 3PC$.

b) Demonstrați că dreptele ST și BC sunt paralele.

c) Calculați aria triunghiului ANS, știind că aria triunghiului ABC este egală cu $48\ \text{cm}^2$.

Anița Alice

Soluție și barem



a) Întrucât în ΔSBC, $[MP]$ este linie mijlocie rezultă că $MP \parallel BS$..1p

Din t.r. a teoremei liniei mijlocii aplicată în ΔAMP se obține că punctul S este mijlocul segmentului AP.

Prin urmare, rezultă $AS = SP = PC = \frac{AC}{3}$, deci $AC = 3 \cdot PC$ 1p

b) În ΔDBC, $[DM]$, $[BA]$ sunt mediane și $DM \cap BA = \{T\} \Rightarrow T$ este centru de greutate..............................1p

Se obține $\frac{AT}{AB} = \frac{1}{3}$, iar din a) rezultă $\frac{AS}{AC} = \frac{1}{3}$ 1p

Cum $\frac{AT}{AB} = \frac{AS}{AC}$, din t.r. a teoremei lui Thales se obține $ST \parallel BC$..1p

c) Dacă $AS = a \Rightarrow SC = 2a$, $AD = 3a$.

Deoarece $[AM]$ este linie mijlocie în ΔDBC rezultă $AM \parallel BD$, ceea ce înseamnă că $AN \parallel BD$.

Aplicând teorema lui Thales în ΔSBD se obține $\frac{SN}{SB} = \frac{SA}{SD} = \frac{1}{4}$, deci $\frac{A_{\Delta ANS}}{A_{\Delta ABS}} = \frac{1}{4}$ (1) 1p

Deoarece $\frac{AS}{AC}=\frac{1}{3}$, rezultă $\frac{A_{\Delta ABS}}{A_{\Delta ABC}}=\frac{1}{3}$ (2)

Înmulțind egalitățile (1) și (2) obținem $\frac{A_{\Delta ANS}}{A_{\Delta ABC}}=\frac{1}{12}$, deci $A_{\Delta ANS}=4\text{ cm}^2$ 1p

Notă: Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.