

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ**  
**SUCEAVA**  
**21 februarie 2016**  
**CLASA a VII-a**

**1. a) (4p)** Numerele naturale  $a_1, a_2, \dots, a_{2016}$  sunt invers proporționale cu numerele  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2016}$  și

$$a_1 + a_3 + \dots + a_{2015} = 2016^2. \text{ Calculați suma } S = \frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2015} \cdot a_{2016}}.$$

**b) (3p)** Se dă șirul de numere raționale:  $\frac{n^2-1}{n}, n, \frac{n^2+1}{n}, \frac{n^2+2}{n}, \dots$ , unde  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculați suma primilor  $n$  termeni ai șirului.

**2. a) (3p)** Determinați valorile reale ale lui  $x$  pentru care:

$$\frac{\sqrt{2^{1980} - 2^{1979} - \dots - 2^{1002}} + \sqrt{4 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{999}}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \sqrt{32^{200}(x^2 - 1)}.$$

**b) (4p)** Să se determine numerele naturale scrise în baza 10 cu proprietatea că fiecare este de 47 de ori mai mare decât suma cifrelor sale.

**3.** Se consideră patrulaterul convex ABCD cu  $AB \parallel CD$  și un punct M interior lui prin care se construiesc paralelele  $MP \parallel AB$  și  $BP \parallel AM$ . Se știe că aria patrulaterului BMCP este jumătate din aria patrulaterului ABCD.

**a) (5p)** Să se arate că  $[MD] \equiv [PC]$ .

**b) (2p)** Dacă punctele B, M și D sunt coliniare, determinați poziția punctului M pe diagonala BD dacă aria triunghiului MAB este  $\frac{1}{5}$  din aria patrulaterului ABCD.

**4. (7p)** Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC cu  $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$ . Dacă  $D \in (BA)$  și  $E \in (CA)$  astfel încât  $[BD] \equiv [CE] \equiv [BC]$  și  $BE \cap CD = \{T\}$ , arătați că patrulaterul TEID este paralelogram.

- Notă:**
- 1. Toate subiectele sunt obligatorii.**
  - 2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.**
  - 3. Timp de lucru 3 ore.**

**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**  
**CLASA a VII-a**

**1. a) (4p)** Numerele naturale  $a_1, a_2, \dots, a_{2016}$  sunt invers proporționale cu numerele  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2016}$  și

$$a_1 + a_3 + \dots + a_{2015} = 2016^2. \text{ Calculați suma } S = \frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2015} \cdot a_{2016}}.$$

*Prof. Elena Ciobîcă*

**b) (3p)** Se dă șirul de numere raționale:  $\frac{n^2-1}{n}, n, \frac{n^2+1}{n}, \frac{n^2+2}{n}, \dots$ , unde  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculați suma

primilor  $n$  termeni ai șirului.

*Prof. Luminița Corocăescu*

**Soluție:** a) Numerele naturale  $a_1, a_2, \dots, a_{2016}$  sunt invers proporționale cu numerele  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2016}$  deci

$$\frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{2} = \frac{a_3}{3} = \dots = \frac{a_{2016}}{2016} = k \Rightarrow a_j = j \cdot k, j \in \{1, 2, 3, \dots, 2016\}.$$

$$a_1 + a_3 + \dots + a_{2015} = k + 3 \cdot k + 5 \cdot k + \dots + 2015 \cdot k = k \cdot (1 + 3 + 5 + \dots + 2015) = k \cdot 1008^2 = 2016^2 \Rightarrow k = 4$$

Deci  $a_1 = 4, a_2 = 8, \dots, a_{2016} = 8064$ .

$$S = \frac{1}{4 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 12} + \dots + \frac{1}{8060 \cdot 8064} = \frac{1}{16} \cdot \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2015 \cdot 2016} \right) =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2015} - \frac{1}{2016} \right) = \frac{1}{16} \cdot \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2016} \right) = \frac{2015}{32256}$$

b) Termenii șirului se pot scrie:  $\frac{n^2-1}{n} = n - \frac{1}{n}, \frac{n^2+1}{n} = n + \frac{1}{n}, \frac{n^2+2}{n} = n + \frac{2}{n} \dots$

$$S_n = \left( n - \frac{1}{n} \right) + n + \left( n + \frac{1}{n} \right) + \left( n + \frac{2}{n} \right) + \dots + \left( n + \frac{n-2}{n} \right) = n^2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} (1 + 2 + \dots + n - 2) = n^2 - \frac{1}{n} +$$

$$\frac{(n-2)(n-1)}{2n} = n^2 + \frac{n-3}{2} = \frac{2n^2 + n - 3}{2}$$

**Barem:**

a) $a_j = j \cdot k, j \in \{1, 2, 3, \dots, 2016\}$	<b>1 p</b>
$a_1 + a_3 + \dots + a_{2015} = k \cdot (1 + 3 + 5 + \dots + 2015) = k \cdot 1008^2 = 2016^2 \Rightarrow k = 4$	<b>1 p</b>
$a_1 = 4, a_2 = 8, \dots, a_{2016} = 8064$	<b>1 p</b>
Calculează suma $S = \frac{2015}{32256}$	<b>1 p</b>
b) Determinarea termenului de ordinul $n$ al șirului: $\left( n + \frac{n-2}{n} \right)$	<b>1 p</b>
$S_n = \left( n - \frac{1}{n} \right) + n + \left( n + \frac{1}{n} \right) + \left( n + \frac{2}{n} \right) + \dots + \left( n + \frac{n-2}{n} \right) = n^2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} (1 + 2 + \dots + n - 2)$	<b>1 p</b>
Finalizare: $S_n = n^2 - \frac{1}{n} + \frac{(n-2)(n-1)}{2n} = n^2 + \frac{n-3}{2} = \frac{2n^2 + n - 3}{2}$	<b>1 p</b>

2. a) (3p) Determinați valorile reale ale lui x pentru care

$$\frac{\sqrt{2^{1980} - 2^{1979} - \dots - 2^{1002}} + \sqrt{4 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{999}}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \sqrt{32^{200}(x^2 - 1)}.$$

Prof. Zanfirica Boiciuc

b) (4p) Să se determine numerele naturale scrise în baza 10 cu proprietatea că fiecare este de 47 de ori mai mare decât suma cifrelor sale.

Gazeta Matematică Nr.1/2014

**Soluție:**

$$\text{a)} 2^{1980} - 2^{1979} - 2^{1978} - \dots - 2^{1002} = 2^{1980} - 2^{1002} (2^{977} + 2^{976} + \dots + 2^2 + 2 + 1) = 2^{1980} - 2^{1002} \cdot (2^{978} - 1) = 2^{1002}$$

$$4 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{999} = 1 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{999} = 1 + 2^{1000} - 1 = 2^{1000}$$

$$2^{501} + 2^{500} = 32^{100} \sqrt{(x^2 - 1)^2} \Leftrightarrow 2^{500} \cdot 3 = 2^{500} \cdot |x^2 - 1| \Leftrightarrow |x^2 - 1| = 3 \quad \text{și folosind condiția } x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x = \pm 2.$$

b) Fie n numărul căutat și notăm cu s(n) suma cifrelor sale. Evident  $n \geq 1 \cdot 47$ , deci n are cel puțin două cifre. Fie  $n = \overline{a_1 a_2 \dots a_k}$ ,  $k \geq 2$ . Vom avea  $10^{k-1} \leq n = 47s(n) \leq 47 \cdot 9k = 423k$ . Inegalitatea  $10^{k-1} \leq 423k$  are loc pentru  $k < 5$ , deci  $k \in \{2, 3, 4\}$ . Plecând de la faptul că n și s(n) au același rest la împărțirea cu 9, obținem că  $n - s(n) = 46 \cdot s(n)$  se divide cu 9 și cum  $(46, 9) = 1$  rezultă că s(n) se divide cu 9, deci și n se divide cu 9. Cum  $n \in M_{47}$  și  $(47, 9) = 1 \Rightarrow n \in M_{423}$ . Prin urmare n este un număr de 3 sau 4 cifre, multiplu al lui 423. Cum  $s(n) \in \{9, 18, 27, 36\} \Rightarrow n \in \{423, 846, 1269, 1692\}$ . Concluzia este verificată pentru  $n \in \{423, 846\}$ .

**Barem:**

a) $2^{1980} - 2^{1979} - 2^{1978} - \dots - 2^{1002} = 2^{1980} - 2^{1002} (2^{977} + 2^{976} + \dots + 2 + 1) = 2^{1980} - 2^{1002} \cdot (2^{978} - 1) = 2^{1002}$	<b>1p</b>
$4 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{999} = 1 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{999} = 1 + 2^{1000} - 1 = 2^{1000}$	<b>1p</b>
$2^{501} + 2^{500} = 32^{100}  x^2 - 1  \Leftrightarrow 2^{500} \cdot 3 = 2^{500}  x^2 - 1 $ de unde $ x^2 - 1  = 3$ și cum $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x = \pm 2$	<b>1p</b>
b) Demonstrează că numărul căutat poate avea 2, 3 sau 4 cifre	<b>1p</b>
Demonstrează că n se divide cu 9	<b>1p</b>
Demonstrează că $n \in M_{423}$	<b>1p</b>
$n \in \{423, 846\}$	<b>1p</b>

3. Se consideră patrulaterul convex ABCD cu  $AB \parallel CD$  și un punct M interior lui prin care se construiesc paralelele  $MP \parallel AB$  și  $BP \parallel AM$ . Se știe că aria patrulaterului BMCP este jumătate din aria patrulaterului ABCD.

a) (5p) Să se arate că  $[MD] \equiv [PC]$ .

b) (2p) Dacă punctele B, M și D sunt coliniare, determinați poziția punctului M pe diagonala BD dacă aria triunghiului MAB este  $\frac{1}{5}$  din aria patrulaterului ABCD.

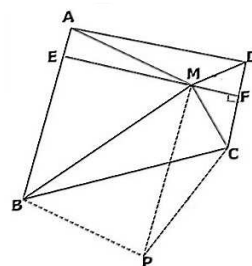
Prof. Florea Andrei

**Soluție:** a) Se construiește prin M perpendiculara EF pe AB și CD,  $E \in AB$  și  $F \in CD$ . Cum  $AB \parallel MP$  și  $AB \parallel CD \Rightarrow MP \parallel CD$  deci  $d(C, MP) = d(M, DC)$ .

$$\text{Cum patrulaterul } ABPM \text{ este paralelogram} \Rightarrow S_{ABM} = S_{BPM} = \frac{AB \cdot EM}{2}.$$

$$\text{Din ipoteză avem } S_{ABCD} = 2S_{BMCP} \Leftrightarrow \frac{(AB + CD) \cdot EF}{2} = 2 \cdot \frac{AB \cdot EM}{2}$$

$$+ 2 \cdot \frac{PM \cdot MF}{2} \quad \text{și cum } [PM] \equiv [AB], \text{ obținem } [CD] \equiv [AB]. \text{ Deci } ABCD$$



este paralelogram ceea ce implică MPCD paralelogram deci  $[MD] \equiv [PC]$ .

b) Dacă  $M \in (BD)$ , folosind teorema lui Thales, obținem  $\frac{MB}{MD} = \frac{ME}{MF}$ .

Cum  $S_{\Delta MAB} = \frac{1}{5} \cdot S_{ABCD} \Leftrightarrow \frac{ME \cdot AB}{2} = \frac{EF \cdot AB}{5}$  deci  $\frac{ME}{EF} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{ME}{MF} = \frac{2}{3}$ , adică  $\frac{MB}{MD} = \frac{2}{3}$

**Barem:**

a) Demonstrează că $ABPM$ este paralelogram $\Rightarrow S_{ABM} = S_{BPM} = \frac{AB \cdot EM}{2}$	1 p
$AB // MP$ și $AB // CD \Rightarrow MP // CD$ deci $d(C, MP) = d(M, DC)$ .	1 p
$S_{ABCD} = 2S_{BMCP} \Leftrightarrow \frac{(AB + CD) \cdot EF}{2} = 2 \cdot \frac{AB \cdot EM}{2} + 2 \cdot \frac{PM \cdot MF}{2}$	1 p
Arată că ABCD este paralelogram	1 p
MPCD paralelogram deci $[MD] \equiv [PC]$	1 p
b) $S_{\Delta MAB} = \frac{1}{5} \cdot S_{ABCD} \Leftrightarrow \frac{ME \cdot AB}{2} = \frac{EF \cdot AB}{5}$ , deci $\frac{ME}{EF} = \frac{2}{5}$	1 p
Utilizează teorema lui Thales și obțin că $\frac{MB}{MD} = \frac{ME}{MF} = \frac{2}{3}$	1 p

4. (7p) Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC cu  $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$ . Dacă  $D \in (BA)$  și  $E \in (CA)$  astfel încât  $[BD] \equiv [CE] \equiv [BC]$  și  $BE \cap CD = \{T\}$ , arătați că patrulaterul TEID este paralelogram.

Gazeta Matematică Nr.10/2014

**Soluție:**

$[BD] \equiv [CE] \equiv [BC] \Rightarrow \Delta BCD$  și  $\Delta CBE$  sunt isoscele de bază (CD) respectiv (BE). Cum BI este bisectoare în triunghiul BCD  $\Rightarrow BI \perp CD$  (1). CI este bisectoare în triunghiul CBE  $\Rightarrow CI \perp BE$  (2).

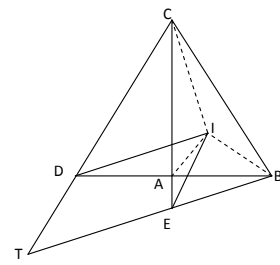
Cum I este centrul cercului înscris triunghiului dreptunghic ABC  $\Rightarrow m(\sphericalangle BIC) = 135^\circ$

Se demonstrează că  $\Delta BCI \equiv \Delta BDI$  și  $\Delta BCI \equiv \Delta ECI$  (cazul LUL) de unde

$m(\sphericalangle BID) = m(\sphericalangle BIC) = 135^\circ$  și  $m(\sphericalangle CIE) = m(\sphericalangle BIC) = 135^\circ$ . Deci  $m(\sphericalangle DIE) = 135^\circ \cdot 3 - 360^\circ = 45^\circ$  și

$m(\sphericalangle BIE) = m(\sphericalangle BID) - m(\sphericalangle DIE) = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ \Rightarrow BI \perp IE$  (3) și analog

$m(\sphericalangle CID) = m(\sphericalangle CIE) - m(\sphericalangle DIE) = 90^\circ \Rightarrow CI \perp ID$  (4). Din relațiile 1 și 3 obținem  $CD // IE$  și cum  $C - D - T \Rightarrow DT // IE$ . Analog, din 2 și 4 obținem  $DI // TE$ . Deci patrulaterul TEID este paralelogram.



**Barem:**

Figura	1 p
Demonstrează că $BI \perp CD$ și $CI \perp BE$	1 p
Calculează $m(\sphericalangle BIC) = 135^\circ$	1 p
Demonstrează congruența triunghiurilor $\Delta BCI \equiv \Delta BDI$ și $\Delta BCI \equiv \Delta ECI$ de unde calculează $m(\sphericalangle BID) = m(\sphericalangle BIC) = m(\sphericalangle CIE) = 135^\circ$	1 p
Calculează $m(\sphericalangle DIE) = 135^\circ \cdot 3 - 360^\circ = 45^\circ$	1 p
Arată că $BI \perp IE$ și $CI \perp ID$	1 p
Finalizare: $CD // IE$ și cum $C - D - T \Rightarrow DT // IE$ . Analog, $DI // TE$ de unde patrulaterul TEID este paralelogram	1 p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.