Inspectoratul Şcolar Judeţean
Harghita

Olimpiada de matematică – clasa a VIII-a
etapa zonală – 27 februarie 2016

Varianta 1

1. a) Fie $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât $a^2 + b^2 \le 2ab$. Demonstraţi că $a = b$.

b) Fie $x, y \in \mathbf{N}^*$, astfel încât $9^{x-2} + 9^{y+2} \le 2 \cdot 3^{x+y}$. Demonstraţi că numărul $3^x + 3^y$ se divide cu 41.

2. Demonstraţi că, dacă $x - 7y + 3 = 0$ şi $x \in [-3; 4]$, atunci:

$$E(x, y) = \sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2} = 5\sqrt{2}$$

3. Lungimiile muchiilor aparținând aceluiași vârf al unui paraleliped dreptunghic exprimate în centimetru sunt numere întregi diferite. Unul dintre muchii este 6 cm. Cât este suma celorlalte două muchii, dacă aria totală și volumul paralalipedului sunt exprimate cu același număr?

4. Se consideră tetraedrul ABCD în care $AB \perp CD$. Fie M mijlocul muchiei BC şi N mijlocul muchiei BD . Pe semidreapta (DM alegem punctul E astfel încât DE = 2DM, iar pe semidreapta (CN alegem punctul F astfel încât CF = 2CN

a) Demonstraţi că punctele F, B, E sunt coliniare;
b) Demonstraţi că triunghiul AEF este isoscel.

5. Pe planul paralelogramului *ABCD* se ridică perpendiculara *AP* . Fie *M* mijlocul segmentului [*AB*], iar *N* mijlocul segmentului [*DM*]. Arătaţi că $PN \perp DM$ dacă şi numai dacă $DM \perp MC$.

Inspectoratul Şcolar Judeţean
Harghita

Olimpiada de matematică – clasa a VIII-a
etapa zonală – 27 februarie 2016

Varianta 2

1. Fie $x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ şi $y = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Să se arate că $x^n + y^n \ge 2$ oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

2. Să se demonstreze că:

a) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} \in$ □ ;

b) $\dfrac{2}{4\cdot 9} + \dfrac{2}{9\cdot 14} + \dfrac{2}{14\cdot 19} + \ldots + \dfrac{2}{2\,009\cdot 2\,014} \in \left(0; \dfrac{1}{10}\right)$.

3. Lungimile muchiilor aparținând aceluiași vârf al unui paraleliped dreptunghic exprimate în centimetru sunt numere întregi diferite. Una dintre muchii este de 6 cm. Cât este suma celorlalte două muchii, dacă aria totală și volumul paralalipedului sunt exprimate cu același număr?

4. Fie ABC un triunghi dreptunghic. Luăm punctul P pe cateta AB și punctul Q pe cateta BC astfel încât AP = CB și BP = CQ. Să se demonstreze că unghiul format de segmentele AQ și CP este de 45^0.

5. În piramida patrulateră regulată VABCD se dă înălţimea $VO = 3\sqrt{2}$ cm, AB = 6cm. Să se calculeze :

a) Tangenta unghiului format de dreptele VA şi DC
b) Măsura unghiului format de dreapta VA şi proiecţia dreptei VA pe planul bazei
c) Distanţa de la punctul O la planul (VBC).

Varianta 1

1. *a) Fie* $a, b \in \mathbf{R}$, *astfel încât* $a^2 + b^2 \le 2ab$. *Demonstraţi că* $a = b$.

b) Fie $x, y \in \mathbf{N}^*$, *astfel încât* $9^{x-2} + 9^{y+2} \le 2 \cdot 3^{x+y}$. *Demonstraţi că numărul* $3^x + 3^y$ *se divide cu 41.*

Rezolvare

a) avem $(a-b)^2 \ge 0$, deci $a^2 + b^2 \ge 2ab$ .... **1 p**

rezultă $a^2 + b^2 = 2ab \Rightarrow (a-b)^2 = 0 \Rightarrow a = b$ .... **2 p**

b) fie $a^2 = 9^{x-2} = \dfrac{9^x}{9^2} = \left(\dfrac{3^x}{9}\right)^2$ şi $b^2 = 9^{y+2} = 9^2 \cdot 9^y = \left(9 \cdot 3^y\right)^2$ .... **2 p**

$2ab = 2 \cdot 3^x \cdot 3^y$ şi din punctul a) rezultă $\dfrac{3^x}{9} = 9 \cdot 3^y \Rightarrow 3^x = 81 \cdot 3^y$ .... **2 p**

$\Rightarrow 3^x + 3^y = 81 \cdot 3^y + 3^y = 3^y(81+1) = 2 \cdot 41 \cdot 3^y$ .... **1 p**

deci $3^x + 3^y$ se divide cu 41.................................... **1 p**

2. *Demonstraţi că, dacă* $x - 7y + 3 = 0$ *şi* $x \in [-3; 4]$, *atunci:*

$$E(x, y) = \sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2} = 5\sqrt{2}$$

Rezolvare

Din $x - 7y + 3 = 0$ avem $x = 7y - 3$ ....

$E(x, y) = \sqrt{(7y-3+3)^2 + y^2} + \sqrt{(7y-3-4)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{50y^2} + \sqrt{50(y-1)^2}$

....

$x \in [-3; 4] \Rightarrow y \in [0; 1]$ ....

Deci $E(x, y) = 5y\sqrt{2} + 5(1-y)\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ ....

3. *Lungimiile muchiilor aparținând aceluiași vârf al unui paraleliped dreptunghic exprimate în centimetru sunt numere întregi diferite. Unul dintre muchii este 6 cm. Cât este suma celorlalte două muchii, dacă aria totală și volumul paralalipedului sunt exprimate cu același număr?.*

Rezolvare

Notăm cu a respectiv b lungimea celor două muchii aparținând vârfului cu o muchie de 6 cm.

Atunci $A_t = 2(6a + ab + 6b)$ și $V = 6ab$ ....

Avem $6ab = 2(6a + ab + 6b)$ adică $6a - 2ab + 6b = 0$ ....

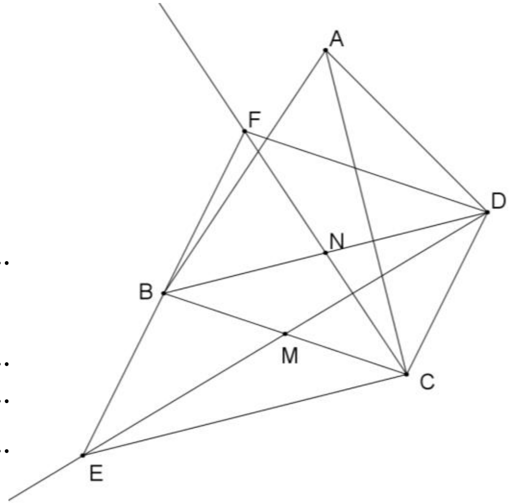
$\Rightarrow (a-3)(b-3) = 9$ de unde....................................

$a = 4$ și $b = 12$ sau $a = 6$ și $b = 6$ ....

A doua soluție nu satisface condițiile problemei, deci $a + b = 16$ ....

4. *Se consideră tetraedrul ABCD în care* $AB \perp CD$. *Fie M mijlocul muchiei BC şi N mijlocul muchiei BD.*
Pe semidreapta (DM alegem punctul E astfel încât DE = 2DM, iar pe semidreapta (CN alegem punctul F astfel încât CF = 2CN
a) Demonstraţi că punctele F, B, E sunt coliniare;
b) Demonstraţi că triunghiul AEF este isoscel.

Rezolvare



Desen ....

a) BC și DE se înjumătățesc $\Rightarrow$BECD este paralelogram

$\Rightarrow CD \parallel EB$ și $(CD) \equiv (EB)$ .... **2 p**

Analog $CD \parallel FB$ și $(CD) \equiv (FB)$ ....

$\Rightarrow EB = BF$ deci E, B, F sunt coliniare ....

b) $AB \perp CD$, $CD \parallel EF \Rightarrow AB \perp EF$ (1) .... **1 p**

$(CD) \equiv (EB)$, $(CD) \equiv (FB) \Rightarrow (EB) \equiv (FB)$ (2) .... **1 p**

(1), (2) $\Rightarrow$ AB este mediatoarea segmentului EF deci triunghiul AEF este isoscel .... **2 p**

5. *Pe planul paralelogramului ABCD se ridică perpendiculara AP . Fie M mijlocul segmentului [AB], iar N mijlocul segmentului [DM]. Arătaţi că $PN \perp DM$ dacă şi numai dacă $DM \perp MC$.*

Rezolvare

Desen .... **1 p**

$PN \perp DM \Rightarrow AN \perp DM$, dar $AN \parallel MC$ deci $MC \perp DM$ .... **4 p**

$\left.\begin{matrix} DM \perp MC \\ AN \parallel MC \end{matrix}\right\} \Rightarrow AN \perp DM$, dar $PA \perp (ABC)$ deci $PN \perp DM$ .... **4 p**

Varianta 2

6. *Fie* $x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ *şi* $y = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. *Să se arate că* $x^n + y^n \geq 2$ *oricare ar fi* $n \in \mathbf{N}$.

Rezolvare

$x \cdot y = 1$ .... **4 p**

$\Rightarrow y = \dfrac{1}{x}$ .... **2 p**

$x^n + y^n = x^n + \dfrac{1}{x^n} \geq 2$ deoarece $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{a} \geq 2, \forall a, b \in \mathbf{R}_+^*$ .... **3 p**

7. *Să se demonstreze că:*

i) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} \in \mathbb{N}$;

ii) $\dfrac{2}{4\cdot 9} + \dfrac{2}{9\cdot 14} + \dfrac{2}{14\cdot 19} + \ldots + \dfrac{2}{2\,009\cdot 2\,014} \in \left(0; \dfrac{1}{10}\right)$.

Rezolvare

a) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} = \dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{4}}{-1} = 1 \in \mathbb{N}$ ....

b)

$\dfrac{2}{4\cdot 9} + \dfrac{2}{9\cdot 14} + \dfrac{2}{14\cdot 19} + \ldots + \dfrac{2}{2\,009\cdot 2\,014} = \dfrac{2}{5}\cdot\left(\dfrac{5}{4\cdot 9} + \dfrac{5}{9\cdot 14} + \dfrac{5}{14\cdot 19} + \ldots + \dfrac{}{2\,009}\right.$

....

$= \dfrac{2}{5}\cdot\left(\dfrac{9-4}{4\cdot 9} + \dfrac{14-9}{9\cdot 14} + \ldots + \dfrac{2014-2009}{2\,009\cdot 2\,014}\right) =$ ....

$= \dfrac{2}{5}\cdot\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{14} + \ldots + \dfrac{1}{2009} - \dfrac{1}{2\,014}\right) =$ ....

$= \dfrac{2}{5}\cdot\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2\,014}\right) = \dfrac{201}{2014} \in \left(0; \dfrac{1}{10}\right)$ ....

8. *Lungimiile muchiilor aparținând aceluiași vârf al unui paraleliped dreptunghic exprimate în centimetru sunt numere întregi diferite. Unul dintre muchii este 6 cm. Cât este suma celorlalte două muchii, dacă aria totală și volumul paralalipedului sunt exprimate cu același număr?.*

Rezolvare

Notăm cu a respectiv b lungimea celor două muchii aparținând vârfului cu o muchie de 6 cm.

Atunci $A_t = 2(6a + ab + 6b)$ și $V = 6ab$ ....

Avem $6ab = 2(6a + ab + 6b)$ adică $6a - 2ab + 6b = 0$ ....

$\Rightarrow (a-3)(b-3) = 9$ de unde ....

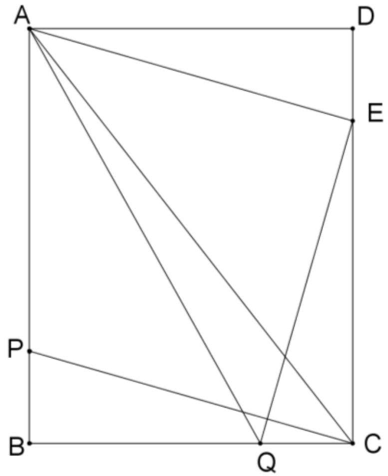
$a = 4$ și $b = 12$ sau $a = 6$ și $b = 6$ ....

A doua soluție nu satisface condițiile problemei, deci $a + b = 16$ ....

9. *Fie ABC un triunghi dreptunghic. Luăm punctul P pe cateta AB și punctul Q pe cateta BC astfel încât*

AP = CB și BP = CQ. Să se demonstreze că unghiul format de segmentele AQ și CP este de 45^0.

Rezolvare



Desen .... **1 p**

Fie D a.î. ABCD să fie dreptunghi și $E \in (CD) : AE \perp CP$ .... **2 p**

Atunci APCE este paralelogram $\Rightarrow (AP) \equiv (EC) \Rightarrow (ED) \equiv (BP) \equiv (CQ)$ .... **2 p**

$\Rightarrow ADE_{\Delta} \equiv ECQ_{\Delta} \Rightarrow (AE) \equiv (EQ)$ și $m\left(\angle AEQ\right) = 90^o$ .... **3 p**

Rezultă $m\left(AQ, CP\right) = m\left(\angle EAQ\right) = 45^o$ .... **1 p**

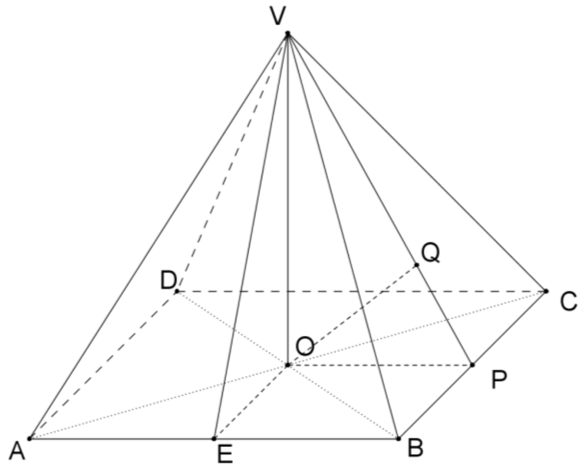
10. *În piramida patrulateră regulată VABCD se dă înălţimea VO =* $3\sqrt{2}$ *cm, AB = 6cm. Să se calculeze :*

a) Tangenta unghiului format de dreptele VA şi DC

b) Măsura unghiului format de dreapta VA şi proiecţia dreptei VA pe planul bazei

c) Distanţa de la punctul O la planul (VBC).

Rezolvare



Desen ....

a) Deoarece DC ∥ AB tangenta unghiului format de dreptele VA şi DC este

$tg\left(\angle VAB\right) = \frac{VE}{AE} = \frac{\sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2 + 3^2}}{3} = \sqrt{3}$ ....

b) Măsura unghiului format de dreapta VA şi proiecţia dreptei VA pe planul bazei este

$m\left(\angle VAO\right) = 45^o$, deoarece $AO = VO = 3\sqrt{2}$ ....

c) $VP \perp BC, OQ \perp VP$ şi $d\left(O,(VBC)\right) = OQ = \frac{3\sqrt{2} \cdot 3}{3\sqrt{3}} = \sqrt{6}$ ....