



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 -**

CLASA A VII-A

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

**Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.**

Subiectul 1.

Se consideră triunghiul ABC în care $m(\widehat{C}) = 2 \cdot m(\widehat{A})$ și $AC = 2 \cdot BC$. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC .

colecția Gazeta Matematică, seria B

Detalii rezolvare	Barem asociat
Considerăm bisectoarea (CD , $D \in AB$, a unghiului \widehat{C} și punctul M , mijlocul segmentului $[AC]$. Triunghiul DAC este isoscel cu baza $[AC]$, deci $DM \perp AC$.	3p
Triunghiurile DMC și DBC sunt congruente (L.U.L.), deci $m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{DMC}) = 90^\circ$.	3p
Obținem $m(\widehat{A}) = 30^\circ$ și $m(\widehat{C}) = 60^\circ$.	1p

Subiectul 2.

a) Determinați numerele naturale a care au proprietatea că $|a - \sqrt{2}| + |a - 2\sqrt{2}| + |a - 3\sqrt{2}| \in \mathbb{Q}$;

b) Demonstrați că numărul $N = |a - \sqrt{2}| + |a - 2\sqrt{2}| + |a - 3\sqrt{2}| + \dots + |a - 2013\sqrt{2}|$ este irațional pentru orice număr rațional a .

Prof. Traian Preda, București

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Fie $ a - \sqrt{2} + a - 2\sqrt{2} + a - 3\sqrt{2} = x \in \mathbb{Q}$. Avem $x \in \{ \pm(a - \sqrt{2}) \pm (a - 2\sqrt{2}) \pm (a - 3\sqrt{2}) \mid a \in \mathbb{N} \}$. Numărul x este rațional dacă suma termenilor care conțin pe $\sqrt{2}$ este egală cu 0.	2p
Acest lucru se întâmplă dacă numerele $(a - \sqrt{2})$ și $(a - 2\sqrt{2})$ au semne contrare numărului $(a - 3\sqrt{2})$.	1p
Deducem că $2\sqrt{2} < a < 3\sqrt{2}$, deci $a \in \{3; 4\}$.	1p
b) $N \in \{ \pm(a - \sqrt{2}) \pm (a - 2\sqrt{2}) \pm \dots \pm (a - 2013\sqrt{2}) \mid a \in \mathbb{Q} \}$, deci N poate fi scris	1p

$N = na + \sqrt{2}(\pm 1 \pm 2 \pm \dots \pm 2013)$, unde $n \in \mathbb{Z}$.	
N este număr rațional dacă există o combinație de semne $+$ sau $-$ astfel încât numărul $A = \pm 1 \pm 2 \pm \dots \pm 2013$ este egal cu 0.	1p
Dar numărul A este impar, deci nenul, pentru orice combinație de semne. Rezultă că numărul N este irațional.	1p

Subiectul 3.

Se consideră triunghiul ABC în care $m(\widehat{ABC}) = 30^\circ$ și $m(\widehat{ACB}) = 15^\circ$. Punctul M este mijlocul laturii $[BC]$. Determinați măsura unghiului \widehat{AMB} .

Detalii rezolvare	Barem asociat
Considerăm semidreapta $(Cx$ astfel încât semidreapta $(CA$ este bisectoarea unghiului \widehat{BCx} . Fie $\{F\} = AB \cap (Cx$. Triunghiul FBC este isoscel cu baza $[BC]$, deci $FM \perp BC$ și $m(\widehat{BFM}) = m(\widehat{CMF}) = m(\widehat{BFx}) = 60^\circ$.	3p
Pentru triunghiul CMF , semidreapta $(CA$ este bisectoare interioară, iar semidreapta $(FA$ este bisectoare exterioară. Deducem că și semidreapta $(MA$ este bisectoare exterioară pentru triunghiul CMF .	3p
Rezultă că $m(\widehat{AMB}) = 45^\circ$.	1p

Subiectul 4.

Se consideră mulțimea $A = \{k \in \mathbb{N} \mid 501 \leq k \leq 1000\}$. Pentru oricare element $k \in A$, notăm cu d_k cel mai mare divizor impar al numărului k .

Arătați că numărul $p = d_{501} + d_{502} + \dots + d_{1000}$ este pătrat perfect.

prof. Cristian Mangra, București

Detalii rezolvare	Barem asociat
Pentru orice număr natural n există, și sunt unice, numerele $x \in \mathbb{N}$ și y impar astfel încât $n = 2^x \cdot y$.	2p
Considerăm $i, j \in \{501; 502; \dots; 1000\}$, $i < j$. Atunci $i = 2^{x_i} \cdot d_i$ și $j = 2^{x_j} \cdot d_j$, unde d_i, d_j sunt numere naturale impare mai mici decât 1000. Dacă $d_i = d_j$, atunci $x_i < x_j$, echivalent cu $2i \leq j \leq 1000$, contradicție.	2p
Deducem că $d_i \neq d_j$. Rezultă că $\{d_k \mid k \in A\} = \{1; 3; 5; \dots; 999\}$.	2p
Deci $p = 1 + 3 + 5 + \dots + 999 = 500^2$. Rezultă concluzia.	1p



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 -**

CLASA A VII-A

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.**

1. Se consideră triunghiul ABC în care $m(\widehat{C}) = 2 \cdot m(\widehat{A})$ și $AC = 2 \cdot BC$. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC .
2. a) Determinați numerele naturale a care au proprietatea că $|a - \sqrt{2}| + |a - 2\sqrt{2}| + |a - 3\sqrt{2}| \in \mathbb{Q}$;
b) Demonstrați că numărul $N = |a - \sqrt{2}| + |a - 2\sqrt{2}| + |a - 3\sqrt{2}| + \dots + |a - 2013\sqrt{2}|$ este irațional pentru orice număr rațional a .
3. Se consideră triunghiul ABC în care $m(\widehat{ABC}) = 30^\circ$ și $m(\widehat{ACB}) = 15^\circ$. Punctul M este mijlocul laturii $[BC]$. Determinați măsura unghiului \widehat{AMB} .
4. Se consideră mulțimea $A = \{k \in \mathbb{N} \mid 501 \leq k \leq 1000\}$. Pentru oricare element $k \in A$, notăm cu d_k cel mai mare divizor impar al numărului k .
Arătați că numărul $p = d_{501} + d_{502} + \dots + d_{1000}$ este pătrat perfect.