OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
22 februarie 2014

CLASA a XI-a

1. Fie $n,k \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ şi $A,B \in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ astfel încât $A^{k+1} = B^{k+1}$ şi $A^k B = B^k A$.

Demonstraţi că dacă matricea $A^k + B^k$ este inversabilă atunci matricea A este inversabilă.

2. Dacă $A \in M_2\left(\mathbb{C}\right)$ este matrice nesingulară, să se demonstreze că $AB - BA \neq A^2, \forall B \in M_2\left(\mathbb{C}\right)$.

3. Fie $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale.

a) **(4p)** Să se arate că dacă şirul $\left(x_n^2\right)_{n\geq 1}$ este convergent, atunci şirul $\left(\cos x_n\right)_{n\geq 1}$ este convergent.

b) **(3p)** Să se arate că dacă $x_n \in \left(-1, 1\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, iar şirurile $\left(x_n^2\right)_{n\geq 1}$ şi $\left(\sin x_n\right)_{n\geq 1}$ sunt convergente, atunci şirul $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$ este convergent.

4. Fie funcţia $f:\mathbb{R} \to \left(0,\infty\right)$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f\left(x\right)}{x} = \infty$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n + f\left(k\right)} = 0$.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA, 22 februarie 2014

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

CLASA a XI-a

1. Fie $n,k\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$ şi $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^{k+1}=B^{k+1}$ şi $A^kB=B^kA$.
Demonstraţi că dacă matricea A^k+B^k este inversabilă atunci matricea A este inversabilă.

Ion Bursuc şi Daniela Macovei

<u>Soluţie.</u>

Dacă A^k+B^k este inversabilă, notând $C=A^k+B^k$, atunci avem
$A-B=I_n(A-B)=C^{-1}\left(A^k+B^k\right)(A-B)=C^{-1}\left(A^{k+1}-A^kB+B^kA-B^{k+1}\right)=O_n \Rightarrow A=B$

Rezultă că $C=2A^k$, deci $\det(C)=\det\left(2A^k\right)=2^n\left(\det(A)\right)^k$ şi cum $\det(C)\neq 0$, deducem că $\det(A)\neq 0$, adică A este inversabilă.

<u>Barem.</u>

$\left(A^k+B^k\right)(A-B)=A^{k+1}-A^kB+B^kA-B^{k+1}=O_n$	2 p
Deduce $A=B$	2 p
$\det(C)=\det\left(2A^k\right)=2^n\left(\det(A)\right)^k$	2 p
Finalizare	1 p

2. Dacă $A\in M_2(\mathbb{C})$ este matrice nesingulară, să se demonstreze că $AB-BA\neq A^2$, $\forall B\in M_2(\mathbb{C})$.

Dan Popescu

<u>Soluţie.</u>

Dacă există $B\in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AB-BA=A^2$, atunci $B-A^{-1}BA=A$ şi
$Tr(A)=Tr\left(B-A^{-1}BA\right)=Tr(B)-Tr\left(A^{-1}BA\right)=Tr(B)-Tr(B)=0$.

Cum $A^2-Tr(A)A+\det(A)I_2=O_2$, obținem $A^2=-dI_2$, unde $d=\det(A)\neq 0$.

Atunci $AB-BA=-dI_2$, deci $Tr(AB-BA)=-2d$. Dar $Tr(AB-BA)=Tr(AB)-Tr(BA)=0$, adică $d=0$, contradicţie!

<u>Barem.</u>

$d=\det(A)\neq 0$	1 p
$Tr(A)=0$	2 p
$A^2=-dI_2 \Rightarrow Tr\left(A^2\right)=-2d$	1 p
$Tr(AB-BA)=0$	2 p
Finalizare	1 p

3. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale.

a) **(4p)** Să se arate că dacă şirul $(x_n^2)_{n\geq 1}$ este convergent, atunci şirul $(\cos x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

b) **(3p)** Să se arate că dacă $x_n \in (-1, 1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, iar şirurile $(x_n^2)_{n\geq 1}$ şi $(\sin x_n)_{n\geq 1}$ sunt convergente, atunci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Mihai Piticari şi Vladimir Cerbu

Soluţie.

a) Dacă $x_n^2 \to l$, atunci $l \in \mathbb{R}$, $l \geq 0$ şi $|x_n| \to \sqrt{l}$. Sunt posibile două situaţii:

i) Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ are limită şi atunci $x_n \to \sqrt{l} \Rightarrow \cos x_n \to \cos\sqrt{l}$ sau $x_n \to -\sqrt{l} \Rightarrow \cos x_n \to \cos(-\sqrt{l})$, deci șirul $(\cos x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

ii) Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ nu are limită. Atunci $(x_n)_{n\geq 1}$ conţine două subşiruri complementare $(x_{k_n})_{n\geq 1}$ şi $(x_{p_n})_{n\geq 1}$ aşa încât $x_{k_n} \to \sqrt{l}$, $x_{p_n} \to -\sqrt{l}$, $l > 0$. Obţinem $\cos(x_{k_n}) \to \cos\sqrt{l}$ şi $\cos(x_{p_n}) \to \cos(-\sqrt{l}) = \cos\sqrt{l}$ (funcţia cosinus este pară), adică şirul $(\cos x_n)_{n\geq 1}$ conţine două subşiruri complementare cu aceeaşi limită deci este convergent.

b) Dacă $x_n \in (-1, 1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_n^2 \to l$, atunci $l \in [0, 1]$ şi sunt posibile două situaţii:

i) Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ are limită şi atunci $x_n \to \sqrt{l}$ sau $x_n \to -\sqrt{l}$, deci $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

ii) Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ nu are limită. Atunci $(x_n)_{n\geq 1}$ conţine două subşiruri complementare $(x_{k_n})_{n\geq 1}$ şi $(x_{p_n})_{n\geq 1}$ aşa încât $x_{k_n} \to \sqrt{l}$, $x_{p_n} \to -\sqrt{l}$, $l \in (0, 1]$. Obţinem $\sin(x_{k_n}) \to \sin\sqrt{l}$ şi $\sin(x_{p_n}) \to \sin(-\sqrt{l})$.

Cum şirul $(\sin x_n)_{n\geq 1}$ este convergent, orice două subşiruri ale sale vor avea aceeaşi limită $\Rightarrow \sin\sqrt{l} = \sin(-\sqrt{l}) \Rightarrow \sin\sqrt{l} = -\sin\sqrt{l} \Rightarrow \sin\sqrt{l} = 0 \Rightarrow \sqrt{l} = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ şi cum $l \in (0, 1] \Rightarrow l = 0$, absurd!

Barem.

a) $|x_n| \to \sqrt{l}$	1 p
Tratează situația i)	1 p
Tratează situația ii)	2 p
b) Tratează situația i)	1 p
Tratează situația ii)	2 p

4. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+f(k)}=0$.

Dan Popescu

<u>Soluție.</u>

Din inegalitatea mediilor avem $\dfrac{n+f(k)}{2}\ge\sqrt{n\cdot f(k)}$, deci $\dfrac{1}{n+f(k)}\le\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{f(k)}}$, $k=\overline{1,n}$.

Sumând aceste inegalități obținem $0<\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+f(k)}\le\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{f(k)}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ (1)

Cum $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n+1}{f(n+1)}}=0$ și aplicând criteriul Stolz-Cesaro avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{f(k)}}}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{f(n+1)}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n+1}{f(n+1)}}+\sqrt{\frac{n}{n+1}}\sqrt{\frac{n+1}{f(n+1)}}\right)=0.$$

Din relația (1), conform teoremei cleștelui, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+f(k)}=0$.

<u>Barem.</u>

$0<\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+f(k)}\le\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{f(k)}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$	3p
$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n+1}{f(n+1)}}=0$	1 p
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{f(k)}}}{2\sqrt{n}}=0$	2 p
Finalizare	1 p