Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

16 februarie 2013

Clasa a V-a

Problema 1.

Să se calculeze:

a) $2012+2013\cdot 2012-2014\cdot 2011$

b) $3+5+7+...+2013-2-4-6-...-2012$

c) $\left[\left(2^8\right)^3:2^5\cdot\left(2^8+2^8\right)+4-4^8:2^{14}\right]:2^{27}+9$

Romeo Zamfir, profesor, Galaţi

Problema 2.

Fie numărul natural $A=\overline{a_1a_2a_3...a_n}$ cu n cifre , $n\geq 2$ .Să se demonstreze că numărul natural $A-s\left(A\right)$ este multiplu al lui 9. ($s\left(n\right)$ este suma cifrelor numărului natural n).

Visilina Guiţă, profesor, Galaţi

Problema 3.

a) Să se determine valorile naturale ale lui n şi cifra nenulă x pentru care $3^{n+6}+3^{n+5}+3^{n+4}+2\cdot 3^{n+3}+4\cdot 3^{n}=\overline{xxxx}$.

G.M.nr. 10.2012

b) Să se determine toate numerele naturale n **,** care împărţite la 9 dau câtul c şi restul r, iar împărţite la 5 dau câtul r şi restul c.

G.M.nr. 10.2012

Problema 4. Fie X cel mai mare număr natural format cu cifre nenule a căror sumă este 2013**.**

Să se determine câtul şi restul împărţirii lui X la numărul 1001.

Visilina Guiţă, profesor, Galaţi

Notă Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 2 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

16 februarie 2013

Clasa a V-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Puncta**
1.	a) Calcul corect si complet.Rezultat calcul =2014	**2p**
	b) Calcul corect si complet.Rezultat calcul =1006	**3p**
	c) Calcul corect si complet.Rezultat calcul =11	**2p**
2.	$A=\overline{a_1a_2a_3...a_{n-1}a_n}=a_1\cdot 10^{n-1}+a_2\cdot 10^{n-2}+...+a_{n-2}\cdot 10^2+a_{n-1}\cdot 10+a_n$ $s(A)=a_1+a_2+a_3+...+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n$	**2p**
	$A=[a_1\cdot \underbrace{99...9}_{(n-1)cifre}+a_2\cdot\underbrace{999...99}_{(n-2)cifre}+...+a_{n-2}\cdot 99+a_{n-1}\cdot 9+(a_1+a_2+...+a_n)]\ddot{x}$	**2p**
	$A-s(A)=a_1\cdot\underbrace{999...99}_{(n-1)cifre}+a_2\cdot\underbrace{999...99}_{(n-2)cifre}+...+a_{n-2}\cdot 99+a_{n-1}\cdot 9\Rightarrow$ $A-s(A)=9\cdot[a_1\cdot\underbrace{111...11}_{(n-1)cifre}+a_2\cdot\underbrace{111...11}_{(n-2)cifre}+...+a_{n-2}\cdot 11+a_{n-1}\cdot 1]$	**2p**
	9 divide pe A-s(A)	**1p**
3.	**a)** Avem $3^n\cdot 3^6+3^n\cdot 3^5+3^n\cdot 3^4+2\cdot 3^n\cdot 3^3+4\cdot 3^n=\overline{xxxx}$. Dând factor comun pe 3^n, se obţine $3^n\cdot 1111=\overline{xxxx}$. Astfel , pentru $n=0\Rightarrow x=1;\ n=1\Rightarrow x=3;\ n=2\Rightarrow x=9$. Pentru $n\geq 3$ nu convine deoarece se obţine $3^n\cdot\overline{1111}$ este număr natural de 5 sau mai multe cifre.	**2p** **2p**
	b) Conform teoremei împărţirii cu rest în mulţimea N avem: $n=9\cdot c+r\quad ,0\leq r<9,\ r,c\in\mathbb{N}$ (1) şi $n=5\cdot r+c\quad ,0\leq c<5,\ r,c\in\mathbb{N}$ (2) Din cele două egalităţi rezultă că $8\cdot c=4\cdot r\Rightarrow r=2\cdot c$	**2p**
	Înlocuind în relaţia (1) obţinem $n=11\cdot c\Rightarrow 11\,|\,n$. Cum $0\leq c<5, c\in\mathbb{N}\Rightarrow 0\leq 11\cdot c<55\Rightarrow n\in\{0,11,22,33,44\}$.	**1p**
4.	Numărul X fiind cel mai mare număr natural cu cifre nenule $\Rightarrow$ trebuie ca X sa aibă număr maxim de cifre nenule de valoare minimă $\Rightarrow X=\underbrace{111...1}_{2013cifre}$.	**2p**
	$X=10^{2012}+10^{2011}+10^{2010}+10^{2009}+...+10^3+10^2+10^1+1$ si $10^3+1=1001\Rightarrow$	**2p**

	că vom împărţi cei 2013 termeni ai sumei în grupe de câte şase termeni şi în fiecare din acestea îi grupăm câte 2 termeni	**1p**
	$X=1001\cdot\left[(10^{2009}+10^{2008}+10^{2007})+(10^{2003}+10^{2002}+10^{2001})+...+(10^{5}+10^{4}+10^{3})\right]+111.$ Catul impartirii $c=\underbrace{111000111000...111000111}_{2010\,cifre}$ şi restul împărţirii este $r=111$	**1p** **1p**