OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 -

CLASA A VI-A

SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1.

Determinați numerele prime p şi q ştiind că $\frac{p}{q}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$, unde a şi b sunt numere naturale nenule.

Prof.Lucian Petrescu, Tulcea

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Dacă $a=b$, rezultă $\frac{p}{q}=2$, deci $q=1$, contradicție. Înseamnă că una dintre fracțiile $\frac{a}{b}$ şi $\frac{b}{a}$ este supraunitară, rezultă că $\frac{p}{q}>1$, deci $p>q$.	**1p**
Putem considera $(a;b)=1$, atunci $\frac{p}{q}=\frac{a^2+b^2}{ab}$. Fracția $\frac{a^2+b^2}{ab}$ este ireductibilă, deci $q=ab$ şi $p=a^2+b^2$. Deducem că $a=1$ sau $b=1$.	**3p**
Dacă, de exemplu, $a=1$, obținem $q=b$ şi $p=b^2+1$. Cum p şi q au parități diferite şi $p>q$, rezultă $q=b=2$ şi $p=5$. Într-adevăr, $\frac{5}{2}=\frac{1}{2}+\frac{2}{1}$.	**3p**

Subiectul 2.

Determinați numerele $a\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}^*$ şi cifra b astfel încât să aibă loc egalitatea $6^a+1=\underbrace{\overline{bb...b}}_{n \text{ ori}}$.

Colecția Gazeta Matematică, Seria B

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Pentru $a=0$, obținem $b=2,\ n=1$. Pentru $a=1$, obținem $b=7,\ n=1$. Pentru $a=\overline{2,4}$, nu avem soluții. Pentru $a=5$, obținem $b=7,\ n=4$ şi $6^5=7776$.	**4p**
Dacă $a\geq 6$, avem $b=7$. Numărul 6^a se divide cu 2^6, dar numărul $\overline{...77776}$ nu se divide cu 2^6, deci nu mai găsim soluții.	**3p**

Subiectul 3.

Se consideră numărul natural prim p. Numărul natural n este divizibil cu p^3 dar nu este divizibil cu p^4. Numerele $d_1, d_2, ..., d_k$, $k \in \mathbb{N}^*$, sunt divizorii numărului n şi $1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n$.

a) Determinați cea mai mică valoare posibilă a lui k;

b) Arătați că numărul $P = d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_k$ este pătrat perfect.

Colecția Gazeta Matematică, Seria B, prelucrare

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Dacă descompunerea numărului n în factori primi este $n = p^3 \cdot p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_m^{a_m}$, numărul de divizori ai lui n este $k = 4 \cdot (a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot ... \cdot (a_m + 1)$. Cea mai mică valoare a lui k este 4 şi se obține pentru $a_1 = a_2 = ... = a_m = 0$.	**3p**
b) Avem $d_i \cdot d_{k+1-i} = n,\ i = \overline{1,k}$, deci $P^2 = n^k$. Cum $k = 4q$, $q \in \mathbb{N}^*$, obținem $P^2 = n^{4q} = \left(n^{2q}\right)^2$.	**3p**
Deducem că $P = n^{2q} = \left(n^q\right)^2$, deci P este pătrat perfect.	**1p**

Subiectul 4.

Se consideră numerele naturale nenule m şi n şi un unghi alungit $\widehat{A_0OA_{m+n}}$. De aceeaşi parte a dreptei A_0A_{m+n} se consideră, în sensul mişcării acelor de ceasornic, semidreptele $(OA_1, (OA_2, ..., (OA_{m+n-1}$, care formează unghiurile $\widehat{A_0OA_1}, \widehat{A_1OA_2}, \widehat{A_2OA_3}, ..., \widehat{A_{m+n-1}OA_{m+n}}$.

Se ştie că un număr de m unghiuri dintre cele menționate au măsura egală cu 3°, iar celelalte n unghiuri au măsura egală cu 5°.

a) Determinați cea mai mică valoare a sumei $m + n$;

b) Dacă $m = 5$, arătați că există $i, j \in \{0,1,2,...,m+n\}$ astfel încât $m\left(\widehat{A_iOA_j}\right) = 30^\circ$.

prof. Mircea Fianu, Bucureşti

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Avem $m \cdot 3^\circ + n \cdot 5^\circ = 180^\circ$. Deducem că m este divizibil cu 5. Pentru ca numărul $m + n$ să fie minim trebuie ca m să fie minim.	**2p**
Pentru $m = 5$, obținem $n = 33$, deci valoarea minimă a sumei $m + n$ este 38.	**1p**
b) Cele 5 unghiuri de 3° determină cel mult 6 sectoare acoperite numai de unghiuri de 5°.	**2p**
Prin urmare, există un sector în care se află o secvență de cel puțin 6 unghiuri de 5° alăturate. Rezultă concluzia.	**2p**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 -

CLASA A VI-A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 2 ore.

1. Determinați numerele prime p şi q ştiind că $\frac{p}{q}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$, unde a şi b sunt numere naturale nenule.

2. Determinați numerele $a\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}^*$ şi cifra b astfel încât să aibă loc egalitatea $6^a+1=\overline{\underbrace{bb...b}_{n \text{ ori}}}$.

3. Se consideră numărul natural prim p. Numărul natural n este divizibil cu p^3 dar nu este divizibil cu p^4. Numerele $d_1,d_2,...,d_k$, $k\in\mathbb{N}^*$, sunt divizorii numărului n şi $1=d_1<d_2<...<d_k=n$.

a) Determinați cea mai mică valoare posibilă a lui k;

b) Arătați că numărul $P=d_1\cdot d_2\cdot...\cdot d_k$ este pătrat perfect.

4. Se consideră numerele naturale nenule m şi n şi un unghi alungit $\widehat{A_0OA_{m+n}}$. De aceeaşi parte a dreptei A_0A_{m+n} se consideră, în sensul mişcării acelor de ceasornic, semidreptele $(OA_1$, $(OA_2$, ..., $(OA_{m+n-1}$, care formează unghiurile $\widehat{A_0OA_1}, \widehat{A_1OA_2}, \widehat{A_2OA_3},..., \widehat{A_{m+n-1}OA_{m+n}}$.

Se ştie că un număr de m unghiuri dintre cele menționate au măsura egală cu 3°, iar celelalte n unghiuri au măsura egală cu 5°.

a) Determinați cea mai mică valoare a sumei $m+n$;

b) Dacă $m=5$, arătați că există $i, j\in\{0,1,2,...,m+n\}$ astfel încât $m\left(\widehat{A_iOA_j}\right)=30^\circ$.

Una dintre probleme a fost selectată din colecția ***Gazetei Matematice***- Seria B, publicație lunară pentru tineret, fondată în anul 1895, editată de
Societatea de Științe Matematice din România