INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN MARAMUREŞ

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Locală - Maramureş

Clasa a V-a

1.Fie numarul $n = 3 + 33 + 333 + ... + \underbrace{33...3}_{2014 \ cifre}$.

a) Aratati ca numarul $3n + 2014$ este divizibil cu 10 .
b) Aflati catul si restul impartirii numarului $3n + 2014$ la 111.

2 . Fie sirul de numere naturale $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ...$ unde

$a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 7$, $a_4 = 15$, $a_5 = 31, ...$

a) Scrieti urmatorii trei termeni ai sirului . Este numarul 2014 termen al sirului ?

b) Aratati ca numarul $a_{2014} - 1$ nu este patrat perfect .

3. a) Sa se determine cifrele a,b,c,d astfel incat :

$$\overline{abcd} - 2 \cdot \overline{ab} + \overline{bcd} = 2014$$

b) Aflati ultimele doua cifre ale numarului $7 + 7^2 + 7^3 + ... + 7^{2014}$.

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Subiecte selectate şi prelucrate de: prof. Heuberger Cristian, C. N. “Gheorghe Şincai” Baia Mare, prof. Ienuţaş Vasile, Şc. Gim. “George Coşbuc” Baia Mare, prof. Popovic Ioana, Şc. Gim. “Octavian Goga” Baia Mare, prof. Pop Sever, Şc. “Vasile Alecsandri” Baia Mare.

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE CLS 5

1.

a) $3n = 9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{99...9}_{2014 \ cifre}$ 1p

$3n = 10 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + ... + 10^{2014} - 1$ 1p

$3n + 2014 = 10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^{2014}$ 1p

Finalizare : $(3n + 2014) \vdots 10$ 1p

b) Deoarece 2013 da restul 1 la impartirea prin 3, grupam termenii cate 3 si ramane un termen

$3n + 2014 = (10^{2014} + 10^{2013} + 10^{2012}) + ... + (10^4 + 10^3 + 10^2) + 10$

$3n + 2014 = 10^{2012} \cdot 111 + ... + 10^2 \cdot 111 + 10$ 1p

$3n + 2014 = 111(10^{2012} + ... + 10^2) + 10$ 1p

Catul este $10^{2012} + 10^{2009} + ... + 10^2$ iar restul este 10

....1p

2 .

a) Observa ca : $a_2 = 1 + 2$, $a_3 = 1 + 2 + 2^2$ $a_4 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3$ ...$a_k = 2^k - 1$

Urmatorii trei termeni sunt :

$a_6 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 2^6 - 1 = 63$ 1p

$a_7 = 2^7 - 1 = 127$ 1p

$a_8 = 2^8 - 1 = 255$ 1p

$a_k = 2^k - 1 \Rightarrow 2^k - 1 = 2014 \Leftrightarrow 2^k = 2015$ imposibil deci 2014 nu e termen 1p

b) $a_{2014} = 2^{2014} - 1 \Rightarrow a_{2014} - 1 = 2^{2014} - 2$ 1p

$u(2^{2014}) = u(2^{2012} \cdot 2^2) = 4u(2^4)^{503} = u(4 \cdot 6) = 4 \Rightarrow u(2^{2014} - 2) = 2$ 1p

Finalizare 1p

3. a) $1000a + 2\overline{bcd} - 2\overline{ab} = 2014 \Rightarrow a \in \{1, 2\}$ 1p

$a = 1 \Rightarrow \overline{bcd} - \overline{1b} = 507 \Rightarrow 99b + \underbrace{10c + d}_{<99} = 517$ 1p

$99b + 10c + d = 99 \cdot 5 + 22 \Rightarrow \begin{cases} b = 5 \\ c = 2 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow \overline{abcd} = 1522$ 1p

$a = 2 \Rightarrow \overline{bcd} - \overline{2b} = 7 \Rightarrow 99b + \underbrace{10c + d}_{<99} = 27 \Rightarrow b = 0$ imposibil..1p

b) Observa ca daca se formeaza grupe de cate 4 termeni si se da factor comun obtinem un multiplu de 2800..1p

$(7^{2014} + 7^{2013} + 7^{2012} + 7^{2011}) + ... + (7^6 + 7^5 + 7^4 + 7^3) + 7^2 + 7^1 =$

$7^{2011}(7^3 + 7^2 + 7^1 + 1) + ... + 7^3(7^3 + 7^2 + 7^1 + 1) + 56 =$ 1p

$M2800+56 \Rightarrow \overline{u_2u_1}=56$ 1p