INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN GALAŢI
Str.Portului Nr.55 B ☎ **0372362000; 0372362001** 🖷 **0236319396**
E-mail: info@isj.gl.edu.ro; Adresă site: www.isj.gl.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

28 februarie 2016

Clasa a XI-a

Problema 1. Fie $\varepsilon \in \mathbb{C}$ o soluţie a ecuaţiei $x^2+x+1=0$. Să se calculeze suma de matrice:

$$S=\sum_{k=1}^{3\cdot n+1}\begin{pmatrix}1 & \varepsilon^k & \varepsilon^{2\cdot k}\\ k & k\cdot(k+1) & k!\cdot k\end{pmatrix}.$$

Problema 2.

a) Fie matricea $X \in M_2(\mathbb{Z})$, $X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Să se calculeze X^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Fie matricele $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$ cu proprietatea $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2016\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Să se demonstreze că există o matrice $D \in M_2(\mathbb{Z})$, astfel încât $D^{2016}=B\cdot A$.

Problema 3.

Fie funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x-1)=-4\cdot x^3+12\cdot x^2-9\cdot x+1$ şi $g_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g_n(x)=\underbrace{(f\circ f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{de\ n\ ori}(\sin x)$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$. Să se calculeze:

a) $a_n=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g_n(x)}{x}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\cdot\sin\dfrac{\pi}{a_n}$

Problema 4.

a) Fie a>0, b ≠ 0, numere date, iar $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir neconstant, definit prin $x_1=b$, $x_{n+1}\cdot x_n=x_n^2-a\cdot x_n+a^2, (\forall)n\geq 1$. Să se studieze convergenţa şirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

b) Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir monoton, x_1>0, astfel încât

$x_1-x_2+x_3-x_4+\ldots+x_{2\cdot n-1}-x_{2\cdot n}=x_{n+1}+x_{n+2}+x_{n+3}+\ldots+x_{2\cdot n}$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Notă: Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

28 februarie 2016

Clasa a XI-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	Din ε soluţie a ecuaţiei $x^2+x+1=0 \Rightarrow \varepsilon^2+\varepsilon+1=0,\ \varepsilon\neq 1$; $\left.\begin{array}{l}\varepsilon^2+\varepsilon+1=0\,/\cdot(\varepsilon-1)\\ \varepsilon-1\neq 0\end{array}\right\}\Rightarrow \varepsilon^3-1=0\Rightarrow \varepsilon^3=1$;	**2p**
	$S=\sum\limits_{k=1}^{3\cdot n+1}\begin{pmatrix}1 & \varepsilon^k & \varepsilon^{2\cdot k}\\ k & k\cdot(k+1) & k!\cdot k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=1}^{3\cdot n+1}1 & \sum\limits_{k=1}^{3\cdot n+1}\varepsilon^k & \sum\limits_{k=1}^{3\cdot n+1}\varepsilon^{2\cdot k}\\ \sum\limits_{k=1}^{3\cdot n+1}k & \sum\limits_{k=1}^{3\cdot n+1}k\cdot(k+1) & \sum\limits_{k=1}^{3\cdot n+1}k!\cdot k\end{pmatrix}$;	**1p**
	$\sum\limits_{k=1}^{3\cdot n+1}1=3n+1;\ \sum\limits_{k=1}^{3\cdot n+1}\varepsilon^k=\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\ldots+\varepsilon^{3\cdot n+1}=\dfrac{\varepsilon\cdot\left(\varepsilon^{3\cdot n+1}-1\right)}{\varepsilon-1}=\dfrac{\varepsilon\cdot\left(\varepsilon^{3\cdot n}\cdot\varepsilon-1\right)}{\varepsilon-1}=\varepsilon$; $\sum\limits_{k=1}^{3\cdot n+1}\varepsilon^{2\cdot k}=\varepsilon^2+\varepsilon^4+\varepsilon^6+\ldots+\varepsilon^{3\cdot n}+\varepsilon^{6\cdot n+2}=\dfrac{\varepsilon^2\cdot\left(\varepsilon^{6n+2}-1\right)}{\varepsilon^2-1}=\varepsilon^2$;	**1p**
	$\sum\limits_{k=1}^{3\cdot n+1}k=\dfrac{(3\cdot n+1)\cdot(3n+2)}{2};\ \sum\limits_{k=1}^{3\cdot n+1}k\cdot(k+1)=\sum\limits_{k=1}^{3\cdot n+1}k^2+\sum\limits_{k=1}^{3n+1}k=$ $\dfrac{(3n+1)\cdot(3n+2)(6\cdot n+3)}{6}+\dfrac{(3n+1)\cdot(3n+2)}{2}=(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(n+1)$;	**1p**
	$\sum\limits_{k=1}^{3n+1}k!\cdot k=\sum\limits_{k=1}^{3n+1}k!\cdot(k+1-1)=\sum\limits_{k=1}^{3n+1}\left[(k+1)!-k!\right]=(3n+2)!-1$;	**1p**
	$S=\begin{pmatrix}3\cdot n+1 & \varepsilon & \varepsilon^2\\ \dfrac{(3\cdot n+1)\cdot(3\cdot n+2)}{2} & (3\cdot n+1)(3\cdot n+2)(n+1) & (3\cdot n+2)!-1\end{pmatrix}$.	**1p**

2.	a) Se calculează $X^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $X^3=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,.... Se deduce că $X^n=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $n\in\mathbb{N}^*$; Se demonstrează prin inducţie matematică că $X^n=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $n\in\mathbb{N}^*$.	1p 2p
	$b)$ $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2016\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A\cdot B)=1 \Rightarrow \det A\cdot\det B=1 \Rightarrow \det A\neq 0 \Rightarrow A$ este inversabilă. $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2016\\ 0 & 1\end{pmatrix}=X^{2016} \Rightarrow B=A^{-1}\cdot X^{2016} \Rightarrow B\cdot A=A^{-1}\cdot X^{2016}\cdot A \Rightarrow$ $B\cdot A=A^{-1}\cdot\underbrace{X\cdot X\cdot X\cdot\ldots\cdot X}_{de\ 2016\text{ ori}}\cdot A \Rightarrow$ $B\cdot A=A^{-1}\cdot\underbrace{X\cdot\left(A\cdot A^{-1}\right)\cdot X\cdot\left(A\cdot A^{-1}\right)\cdot X\cdot\left(A\cdot A^{-1}\right)\cdot\ldots\cdot X\cdot\left(A\cdot A^{-1}\right)\cdot X}_{de\ 2016\text{ ori factorul } X \text{ şi de 2015 ori factorul } \left(A\cdot A^{-1}\right)}\cdot A=$ $=\underbrace{\left(A^{-1}\cdot X\cdot A\right)\cdot\left(A^{-1}\cdot X\cdot A\right)\cdot\left(A^{-1}\cdot X\cdot A\right)\ldots\cdot\left(A^{-1}\cdot X\cdot A\right)}_{de 2016 ori}=\left(A^{-1}\cdot X\cdot A\right)^{2016}$; $B\cdot A=\left(A^{-1}\cdot X\cdot A\right)^{2016} \Rightarrow A^{-1}\cdot X\cdot A=D.$	**1p** **1p** **1p** **1p**
3.	a) În funcţia f, substituind x cu $x+1$, obţinem: $f(x)=-4\cdot(x+1)^3+12\cdot(x+1)^2-9\cdot(x+1)+1 \Rightarrow f(x)=-4x^3+3\cdot x$; $g_1(x)=f(\sin x)=-4\sin^3 x+3\cdot\sin x=\sin(3x)$; $g_2(x)=f(\sin 3x)=-4\sin^3 3x+3\cdot\sin 3x=\sin\left(3^2x\right)$; Se demonstrează prin inducţie matematică $g_n(x)=\sin\left(3^n x\right), n\geq 1$; $a_n=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(3^n x\right)}{x}=3^n$;	**2p** **1p** **2p**
	. $b)$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\cdot\sin\dfrac{\pi}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}3^n\cdot\sin\dfrac{\pi}{3^n}=\pi.$	**2p**

4.	a) Cazul 1. Fie b>0, $a \neq b$; $x_2 = \dfrac{b^2 - ab + a^2}{b} > a$; Demonstrăm prin inducţie matematică că $x_n > a,\ n \geq 2$: 1.$P(2):\ x_2 > a\ (A)$ 2.$P(n) \Rightarrow P(n+1), (\forall) n \geq 2$ Presupunem că $\mathrm{P}(n)$ este adevărată Să demonstrăm că $\mathrm{P}(n+1)$ este adevărată $P(n+1):\ \mathrm{x}_{n+1} > a \Rightarrow \dfrac{x_n^2 - a \cdot x_n + a^2}{x_n} > a \Leftrightarrow (x_n - a)^2 > 0 (A)$ Aşadar $x_n > a,\ n \geq 2$; $x_{n+1} - x_n = \dfrac{x_n^2 - a \cdot x_n + a^2}{x_n} - x_n = \dfrac{a \cdot (a - x_n)}{x_n} < 0 \Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător $\Rightarrow$ există $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit atunci $l \in \mathbb{R}$ şi trecând la limită relaţia de recurenţa, obţinem: $l = \dfrac{l^2 - a \cdot l + a^2}{l} \Leftrightarrow l = a \Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.	**2p**
	Cazul 2. $a = b > 0 \Rightarrow x_n = a,\ (\forall) n \geq 1$ Deci, $(x_n)_{n\geq 1}$ este şir constant-nu convine. Cazul3. b<0; $\mathrm{x}_1 = b < 0$ şi $x_{n+1} = \dfrac{\left(x_n - \dfrac{a}{2}\right)^2 + \dfrac{3 \cdot a^2}{4}}{x_n},\ (\forall) n \geq 1$ Se demonstrează prin inducţie matematică că $\mathrm{x}_n < 0, (\forall) n \geq 1$ $x_{n+1} - x_n = \dfrac{x_n^2 - a \cdot x_n + a^2}{x_n} - x_n = \dfrac{a \cdot (a - x_n)}{x_n} < 0 \Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător $\Rightarrow$ există $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n < 0$; Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit atunci $l \in \mathbb{R}$ şi trecând la limită relaţia de recurenţă, obţinem: $l = \dfrac{l^2 - a \cdot l + a^2}{l} \Leftrightarrow l = a -$ nu convine pentru că $l < 0,$ iar a>0; Aşadar, $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător şi nemărginit, adică are limita - $\infty,$ pentru b<0 $\Rightarrow$ $(x_n)_{n\geq 1}$ este divergent.	**2p**

	b) $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + ... + x_{2\cdot n-1} - x_{2\cdot n} = x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} + ... + x_{2\cdot n}\ (1)$ Egalitatea are loc şi pentru $n+1$: $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + ... + x_{2\cdot n+1} - x_{2\cdot n+2} = x_{n+2} + x_{n+3} + ... + x_{2\cdot n+2}\ (2)$; Scăzând din 2 pe 1 $\Rightarrow x_{2n+1} - x_{2n+2} = x_{2n+1} + x_{2n+2} - x_{n+1} \Rightarrow x_{n+1} = 2\cdot x_{2n+2} \Rightarrow x_n = 2\cdot x_{2n}, (\forall)\, n \ge 1$. Deci $x_1 = 2\cdot x_2 = 2^2\cdot x_4 = 2^3\cdot x_8 = ... = 2^n \cdot x_{2^n}$, adică $x_{2^n} = \frac{x_1}{2^n} < 1$. Cum $(x_n)_{n\ge 1}$ este monoton şi $x_1 > 0 \Rightarrow (x_n)_{n\ge 1}$ este descrescător. $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1}{2^n} = 0$; Fie $k = [\log_2 n] \Rightarrow\ 2^k \le n < 2^{k+1}$. $\begin{cases} (x_n)_{n\ge 1} \text{ este descrescător} \\ 2^k \le n < 2^{k+1} \end{cases} \Rightarrow x_{2^{k+1}} < x_n \le x_{2^k} \Rightarrow \frac{x_1}{2^{[\log_2 n]+1}} < x_n \le \frac{x_1}{2^{[\log_2 n]}}$; Din teorema cleştelui $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.	 **1p** **1p** **1p**