Inspectoratul Şcolar Judeţean Harghita

Olimpiada de matematică – clasa a X-a
etapa zonală – 27 februarie 2016

1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $(x-1)^{x+2} = (x-1)^{x^2+x}$.

2. Arătați că $\lg^2 2 + \lg^2 5 > \frac{5}{9}$

3. Arătați că dacă $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, $|z| = 1$ și $\mathrm{Im}(z) > 0$, atunci

$$\left(\frac{|z+1|+|z-1|}{|z+i|}\right)^2 + \left(\frac{|z+1|-|z-1|}{|z-i|}\right)^2 = 4$$

4. Arătați că dacă M este un punct în planul triunghiului echilateral ABC de centru O, atunci proiecțiile punctului M pe dreptele BC, AC și AB formează un triunghi al cărui centrul de greutate este mijlocul segmentului OM

Inspectoratul Şcolar Judeţean Harghita

Olimpiada de matematică – clasa a X-a
etapa zonală – 27 februarie 2016
Soluţii şi bareme

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia: $(x-1)^{x+2}=(x-1)^{x^2+x}$.

Soluţie

Dacă $x-1=-1$, avem $x=0$ şi $(-1)^2=(-1)^0$ adevărat. **1p**

Dacă $x-1=0$, avem $x=1$ şi $0^3=0^2$ adevărat. **1p**

Dacă $x-1=1$, avem $x=2$ şi $1^4=1^6$ adevărat. **1p**

Dacă $x-1\notin\{-1,0,1\}$, atunci $x+2=x^2+x \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$ **1p**

Dacă $x=-\sqrt{2}$, atunci $x-1<0$ şi $x+2\notin\mathbb{Q}$, deci nu există $(x-1)^{x+2}$. **1p**

Dacă $x=\sqrt{2}$, atunci $x-1>0$, deci există $(x-1)^{x+2}$. **1p**

Astfel mulţimea soluţiilor este $\{0,1,2,\sqrt{2}\}$. **1p**

2. Arătaţi că $\lg^2 2+\lg^2 5>\frac{5}{9}$

Soluţie

Notăm $\lg 2=x$, atunci $\lg 5=1-x$ **2p**

Inegalitatea de demonstrat devine $x^2+(1-x)^2>\frac{5}{9}$, echivalent cu

$9x^2-9x+2>0$, echivalent cu

$x\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$ **4p**

$\lg 2<\frac{1}{3}$ deoarece $2<\sqrt[3]{10}$, deci inegalitatea din enunţ este adevărată. **1p**

3. Arătaţi că dacă $z\in\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$, $|z|=1$ şi $\operatorname{Im}(z)>0$, atunci

$$\left(\frac{|z+1|+|z-1|}{|z+i|}\right)^2+\left(\frac{|z+1|-|z-1|}{|z-i|}\right)^2=4$$

Soluţie

Folosind relaţia $|z|^2=z\cdot\bar{z}$, obţinem

$$A=\left(\frac{|z+1|+|z-1|}{|z+i|}\right)^2+\left(\frac{|z+1|-|z-1|}{|z-i|}\right)^2=\frac{|z+1|^2+|z-1|^2+2|z^2-1|}{|z+i|^2}+\frac{|z+ \text{[illegible]}}{}$$

$$=\frac{2|z|^2+2+2|z^2-1|}{|z|^2+1+i\bar{z}-iz}+\frac{2|z|^2+2-2|z^2-1|}{|z|^2+1-i\bar{z}+iz}=\frac{4+2|z^2-1|}{2+i(\bar{z}-z)}+\frac{4-2|z^2-1|}{2-i(\bar{z}-z)}$$

....

Dacă $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$, atunci $a^2+b^2=1$ şi $b>0$, deci avem în continuare

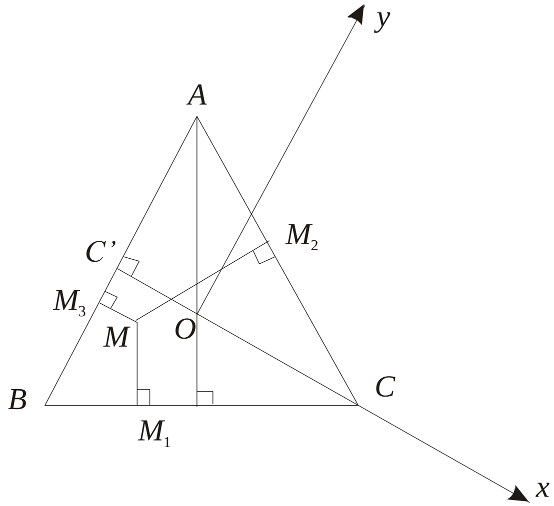
$$A=\frac{4+2|z^2-1|}{2+2b}+\frac{4-2|z^2-1|}{2-2b}=\frac{4-2b|z^2-1|}{1-b^2}=\frac{4-2b|a^2-b^2-1+2abi|}{a^2}= \text{[illegible]}$$

$$=\frac{4-2b|-2b^2+2abi|}{a^2}=\frac{4-4b^2|-b+ai|}{a^2}=\frac{4-4b^2\sqrt{b^2+a^2}}{a^2}=\frac{4(1-b^2)}{a^2}=4$$

....

4. Arătaţi că dacă M este un punct în planul triunghiului echilateral ABC de centru O, atunci proiecţiile punctului M pe dreptele BC, AC şi AB formează un triunghi al cărui centrul de greutate este mijlocul segmentului OM.

Soluţie



Fie punctul O originea sistemului dreptunghic cartezian, $OC = Ox$, $e = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ una dintre rădăcini de ordinul trei ale unităţii, iar unitatea de măsură a sistemului fie lungimea segmentului $[OC]$.

Astfel afixele punctelor C, A şi B sunt $c = 1$, $a = e$ respectiv $b = e^2$.

$m_3 = -\frac{1}{2} + i \cdot \operatorname{Im} m = -\frac{1}{2} + \frac{m - \overline{m}}{2}$ **2p**

Prin rotirea figurei cu 120°, punctul de afix m va avea afixul $m' = m \cdot e$, iar punctul cu afix m_2 va avea afixul $m_2' = -\frac{1}{2} + \frac{me - \overline{m} \cdot \overline{e}}{2}$.

Printr-o nouă rotaţie cu 240° a figurei, punctul cu afixul m_2' ajunge în punctul m_2 şi $m_2 = e^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{me - \overline{m} \cdot \overline{e}}{2}\right) = -\frac{e^2}{2} + \frac{m - \overline{m}e}{2}$.

Se roteşte încă o dată figura cu 240°, în urma căruia m ajunge în punctul me^2, iar m_1 în $m_1' = -\frac{1}{2} + \frac{me^2 - \overline{m} \cdot \overline{e}}{2}$.

Printr-o ultimă rotaţie cu 120°,

$m_1 = e\left(-\frac{1}{2} + \frac{me^2 - \overline{m} \cdot \overline{e}^{2}}{2}\right) = -\frac{e}{2} + \frac{m - \overline{m}e^2}{2}$ ....

În urma acestor rotaţii $m_1 = -\frac{e}{2} + \frac{m - \overline{m}e^2}{2}$, $m_2 = -\frac{e^2}{2} + \frac{m - \overline{m}e}{2}$ şi $m_3 = -\frac{1}{2} + \frac{m - \overline{m}}{2}$.

Obţinem

$G_{M_1M_2M_3} = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{3} = -\frac{1}{6}\left(e^2 + e + 1\right) + \frac{m}{2} - \frac{\overline{m}}{6}\left(e^2 + e + 1\right) = \frac{m}{2}$,

deci G_M este mijlocul segmentului OM . ...