Olimpiada de Matematică - Etapa Locală
Maramureş – 28 februarie 2016
Clasa a VI - a

1. a) Arătați că numărul

$$N = (2+4+6+\cdots+4032)\cdot\left(\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{2}{2015\cdot 2017}\right)$$

este un pătrat perfect.

b) Fie $\widehat{AOB}$ un unghi alungit, $D \notin AB$ și $[OC$ bisectoarea unghiului $\widehat{DOA}$. Știind că măsura unghiului $\widehat{COD}$ este $\frac{2}{5}$ din măsura unghiului $\widehat{DOB}$, calculați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\widehat{BOD}$ și $\widehat{COD}$.

2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și $A_1, A_2, \dots, A_n$ puncte coliniare în aceasta ordine astfel încât $A_1A_2 = x$, $A_2A_3 = 2x$, $A_3A_4 = 3x$, … , $A_{n-1}A_n = (n-1)x$, unde $x \in \mathbb{N}^*$.

a) Dacă M este mijlocul segmentului (A_9A_{10}) și N este mijlocul segmentului $(A_{24}A_{25})$, aflați lungimea segmentului (MN) știind că $x = 2cm$.

b) Aflați x și n astfel încât $A_1A_n = 870cm$.

3. Se dă fracția $\frac{2x+3}{2x-7}$, cu $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 4$. Fie $x_1, x_2, \dots, x_{1000}$ primele 1000 de numere naturale pentru care fracția se simplifică.

a) Calculați x_{1000}.

b) Arătați că $x_p + x_q - x_{p+q} = 1$ oricare ar fi $p, q \in \{1,2,\dots,1000\}$.

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte
Timp de lucru 2 ore

Problemele au fost propuse și selectate de către:
Conf.univ.Horvat Marc Andrei- Centrul Universitar Nord Baia Mare
Prof. Darolți Erica- Colegiul național„V.Lucaciu” Baia Mare
Prof. Serasz Maria- Școala Gimnazială „D. Cantemir” Baia Mare

BAREME – clasa a VI a

Soluţie. 1.

a) $2+4+6+\cdots+4032=2016\cdot 2017$ **1 punct**

$\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{2}{2015\cdot 2017}=\frac{2016}{2017}$ **2 puncte**

$N=2016^2$ pătrat perfect **1 punct**

b) Fie $x=m\left(\widehat{COD}\right)$. Atunci $x=\frac{2}{5}(180-2x)$ **1 punct**

$x=40°$ **1 punct**

Fie $[OM$ bisectoarea unghiului $\widehat{COD}$ și $[ON$ bisectoarea unghiului $\widehat{BOD}$

$m\left(\widehat{MOD}\right)=20°, m\left(\widehat{DON}\right)=50°$

$m\left(\widehat{MON}\right)=70°$ …………………… ………………………………………………………………………….**1 punct**

Soluţie. 2.

a) $A_9A_{10}=18cm, A_9M=MA_{10}=9cm$ 0,5 puncte

$A_{24}A_{25}=48cm, A_{24}N=NA_{25}=24cm$ 0,5 puncte

$MN=MA_{10}+A_{10}A_{11}+\cdots+A_{23}A_{24}+A_{24}N$ 1 punct

$MN=9+(20+22+\cdots+46)+24$ 1 punct

$MN=495\ cm$ 1 punct

b) $A_1A_n=x+2x+\cdots+(n-1)x=x\cdot\frac{(n-1)n}{2}$ 1 punct

$n(n-1)\cdot x=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 29$ 0,5 puncte

$n(n-1)|\ 2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 29\ \Rightarrow n\in\{2,3,4,5,6,30\}$ 0,5 puncte

$$\left.\begin{array}{c} n=2\Rightarrow x=870 \\ n=3\Rightarrow x=290 \\ n=4\Rightarrow x=145 \\ n=5\Rightarrow x=87 \\ n=6\Rightarrow x=58 \\ n=30\Rightarrow x=2 \end{array}\right|$$

1 punct

Soluţie. 3.

a) Fracţia $\frac{2x+3}{2x-7}$ este reductibilă dacă există $d \in \mathbb{N}^*$, $d \neq 1$ astfel încât $d|2x+3$ și $d|\ 2x-7$ **1 punct**

Cum $d \in \{2,5,10\}$ și $2x+3$, $2x-7$ numere impare, rezultă $d=5$ **1 punct**

$2x+3=5k$, k număr impar **1 punct**

$k=2p+1$, $x_p=5p+1$, $p \geq 1$ **1 punct**

$x_{1000}=5001$ **1 punct**

b) $x_p=5p+1$, $x_q=5q+1$, $x_{p+q}=5(p+q)+1$ **1 punct**

Verifică relaţia **1 punct**