OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
21 februarie 2016
CLASA a V – a

1. Fie numerele $m=(1+2+3)^4+5\cdot6\cdot(7+8+9)$ și $n=1+2+3+...+63$.

a) (3p) Calculați 2016^{m-n}.

b) (4p) Determinați cel mai mare și cel mai mic număr natural nenul care împărțit la n dă câtul egal cu un sfert din rest.

2. Pătratul unui număr natural N de două cifre este un număr natural de trei cifre, care are cifra zecilor dată de suma dintre cifra unităţilor şi cea a sutelor.

a) **(3p)** Arătaţi că cifra sutelor este egală cu cifra unităților.

b) **(4p)** Determinaţi toate numerele naturale N cu proprietatea din enunţ.

3. **(7p)** Se dau mulțimile $A=\{x\,/\,x=11a-3;\ a\in\mathbb{N}^*\}$ și $B=\{y\,/\,y=103-2b;\ b\in\mathbb{N}\}$.

Determinați $A\cap B$.

Notă: **1. Toate subiectele sunt obligatorii.**
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 2 ore.

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a V-a

1. Fie numerele $m=(1+2+3)^4+5\cdot 6\cdot(7+8+9)$ și $n=1+2+3+...+63$.

a) (3p) Calculați 2016^{m-n}.

b) (4p) Determinați cel mai mare și cel mai mic număr natural nenul care împărțit la n dă câtul egal cu un sfert din rest.

.

Prof. Stela Boghian

***Soluție*:**

a) $m=6^4+5\cdot 6\cdot 24=1296+720=2016$ și $n=63\cdot 64:2=2016 \Rightarrow 2016^{m-n}=2016^0=1$.

b) Din teorema împărțirii cu rest avem $d=2016\cdot c+r; r<2016$; cum $c=\frac{r}{4} \Rightarrow r$ trebuie să fie multiplu de 4. Cel mai mare număr se obține pentru $r=2012$, iar cel mai mic număr nenul pentru $r=4$. Numerele căutate sunt 1016060 și 2020.

Barem

a)	$m=6^4+5\cdot 6\cdot 24=1296+720=2016$	*1 p*
	$n=63\cdot 64:2=2016$	*1 p*
	$\Rightarrow 2016^{m-n}=2016^0=1$	*1 p*
b)	Din teorema împărțirii cu rest avem $d=2016\cdot c+r; r<2016$; cum $c=\frac{r}{4} \Rightarrow$ r trebuie să fie multiplu de 4.	*2 p*
	Cel mai mare număr se obține pentru $r=2012$, acesta este 1016060.	*1 p*
	iar cel mai mic număr nenul pentru $r=4$; acesta este 2020.	*1 p*

2. Pătratul unui număr natural N de două cifre este un număr natural de trei cifre, care are cifra zecilor dată de suma dintre cifra unităţilor şi cea a sutelor.

a) (3p) Arătaţi că cifra sutelor este egală cu cifra unităților.

b) (4p) Determinaţi toate numerele naturale N cu proprietatea din enunţ.

Prof. Liliana Timofti

***Soluţie*: a)**

$N^2=\overline{a(a+b)b}=100a+10(a+b)+b=100a+10a+10b+b=11(10a+b)=11\cdot\overline{ab} \Rightarrow N^2\vdots 11$. Cum 11 este număr prim, $\overline{ab}\vdots 11$, de unde $a=b$.

b) Aşadar: $N^2=11(10a+a)=11^2a \Rightarrow a=k^2$

Deoarece a este cifră nenulă şi pătratul unui număr natural, rezultă $a\in\{1,4,9\}$.

Cum $N^2=\overline{a(a+b)b}=\overline{a(2a)a}$, $2a$ este cifră şi $a=9 \Rightarrow 2a=18$ care nu convine.

Aşadar $a=1 \Rightarrow N=11$ sau $a=4 \Rightarrow N=22$.

Barem

a)	$N^2=\overline{a(a+b)b}=100a+10(a+b)+b=100a+10a+10b+b=11(10a+b)=11\cdot\overline{ab}$	*2 p*

	$\Rightarrow N^2 \vdots 11$. Cum 11 este număr prim, $\overline{ab} \vdots 11$, de unde $a = b$.	*1 p*
b)	$N^2 = 11(10a + a) = 11^2 a \Rightarrow a = k^2$	*1 p*
	Deoarece a este cifră nenulă şi pătratul unui număr natural, rezultă $a \in \{1, 4, 9\}$.	*1 p*
	Cum $N^2 = \overline{a(a+b)b} = \overline{a(2a)a}$, $2a$ este cifră şi $a = 9 \Rightarrow 2a = 18$ care nu convine.	*1 p*
	Aşadar $a = 1 \Rightarrow N = 11$ sau $a = 4 \Rightarrow N = 22$	*1 p*

3. (7p) Se dau mulțimile $A = \{x \,/\, x = 11a - 3;\ a \in \mathbb{N}^*\}$ și $B = \{y \,/\, y = 103 - 2b;\ b \in \mathbb{N}\}$.
Determinați $A \cap B$.

G.M. nr. 11/2015

Soluţie: $A \cap B$ conține elementele comune, deci $x = y \Rightarrow 11a - 3 = 103 - 2b \Rightarrow 11a + 2b = 106$. Cum $2b$ și 106 sunt numere pare, rezultă că și $11a$ este număr par, adică a este număr par. El fiind și nenul, rezultă că $a \in \{2, 4, 6, 8\}$, pentru valori mai mari relația $11a + 2b = 106$ nu poate fi îndeplinită în $\mathbb{N}$. În concluzie $A \cap B = \{19,\ 41,\ 63,\ 85\}$.

Barem

$A \cap B$ conține elementele comune, deci $x = y \Rightarrow 11a - 3 = 103 - 2b \Rightarrow 11a + 2b = 106$.	*2 p*
Cum $2b$ și 106 sunt numere pare, rezultă că și $11a$ este număr par, adică a este număr par	*2 p*
El fiind și nenul, rezultă că $a \in \{2, 4, 6, 8\}$, pentru valori mai mari relația $11a + 2b = 106$ nu poate fi îndeplinită.	*2 p*
În concluzie $A \cap B = \{19,\ 41,\ 63,\ 85\}$.	*1 p*

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.