OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală 28.02.2015
CLASA a XI-a

Subiectul 1 (7 puncte)

1. Să se studieze convergenţa şi limita şirului $a_n = \sin \pi \sqrt[k]{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}$, unde $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$

***

Subiectul 2 (7 puncte)

2. Demonstraţi că pentru fiecare $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq 2$ ecuaţia $\dfrac{1^{nx} + 2^{nx} + \ldots + n^{nx}}{n^{nx}} = \dfrac{e}{e-1}$ are o unică rădăcină reală.

***

Subiectul 3 (7 puncte)

3. Se consideră şirul $a_n = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$, $\forall\ n \in \boldsymbol{N}^*$. Ştiind că $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \dfrac{\pi^2}{6}$, să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} n\left(a_n - \dfrac{\pi^2}{6}\right)$.

***

Subiectul 4 (7 puncte)

4. Fie $m, n \in \boldsymbol{N}^*$ şi $A, B \in M_2(R)$ astfel încât $A^m \cdot B^n = B^n \cdot A^m$. Să se arate că dacă matricele A^m şi B^n nu sunt de forma λI_2, $\lambda \in R$, atunci $AB = BA$.

***

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Punctajul minim de calificare la etapa judeţeană a olimpiadei de matematică este de 14 puncte.