Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei Naţionale de Matematică
Craiova, 16 februarie 2014
Clasa a V-a

Problema 1. Aflaţi care dintre numerele $a = 2^{19} \cdot 5^{29}$ şi $b = 3^{18} \cdot 7^{20}$ este mai mare.

G. M. nr. 1/2013

Problema 2. Să se arate că oricare ar fi cifra nenulă a, numărul

$$b = 21^{\overline{31a}} + 32^{\overline{a13}} + 43^{\overline{a31}}$$

se divide la 10.

* * *

Problema 3. Precizaţi câte numere nenule A, de cel mult şase cifre, verifică, în acelaşi timp, condiţiile:

1) A este par

2) A este cub perfect

3) jumătatea lui A este pătrat perfect.

* * *

Problema 4. Determinaţi cele mai mici numere naturale consecutive a, b, c, d ştiind că a este divizibil cu 8, b cu 7, c cu 6 şi d cu 5.

* * *

Notă:
Timp de lucru: 2 ore;
Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 şi 7.

SOLUŢII
- clasa a V-a -

Problema 1. Aflaţi care dintre numerele $a = 2^{19} \cdot 5^{29}$ şi $b = 3^{18} \cdot 7^{20}$ este mai mare.

G. M. nr. 1/2013

Soluţie. Avem $a = 2^{19} \cdot 5^{29} = 2^9 \cdot 2^{10} \cdot 5^9 \cdot 5^{20} = (2 \cdot 5)^9 \cdot (2 \cdot 25)^{10} = 10^9 \cdot 50^{10}$ şi $b = 3^{18} \cdot 7^{20} = (3^2)^9 \cdot (7^2)^{10} = 9^9 \cdot 49^{10}$. Deoarece $9^9 < 10^9$ şi $49^{10} < 50^{10}$, rezultă că $a > b$.

Problema 2. Să se arate că oricare ar fi cifra nenulă a numărul

$$b = 21^{\overline{31a}} + 32^{\overline{a13}} + 43^{\overline{a31}}$$

se divide la 10.

Soluţie. Avem

$$\overline{a13} = 100a + 13 = 100a + 12 + 1 = M4 + 1 \quad (1)$$
$$\overline{a31} = 100a + 31 = 100a + 28 + 3 = M4 + 3 \quad (2)$$

Rezultă că:

$$u(21^{\overline{31a}}) = 1,\ u(32^{\overline{a13}}) = 2,\ u(43^{\overline{a31}}) = 7$$

şi deci $u(b) = 0$, de unde b este divizibil cu 10.

Problema 3. Precizaţi câte numere nenule A, de cel mult şase cifre, verifică, în acelaşi timp, condiţiile:

1) A este par

2) A este cub perfect

3) jumătatea lui A este pătrat perfect.

Soluţie. Deoarece A este nenul şi cub perfect, $A = b^3$ cu $b \in N^*$. Deoarece $A < (100)^3$, rezultă $b < 100$. A este par, deci b este număr par. Din $b = 2c$, obţinem $A = 8 \cdot c^3$, cu $1 \leq c \leq 49$. $A : 2 = 4 \cdot c^3 = (2 \cdot c)^2 \cdot c$ fiind pătrat perfect, conduce la concluzia că c este pătrat perfect. Obţinem $c \in \{1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49\}$ şi astfel, există 7 numere care verifică condiţiile impuse.

Problema 4. Determinaţi cele mai mici numere naturale consecutive a, b, c, d ştiind că a este divizibil cu 8, b cu 7, c cu 6 şi d cu 5.

Soluţie. Fie $a,\ b = a + 1,\ c = a + 2,\ d = a + 3$ cele patru numere consecutive. Obţinem:

$$8|a \Longrightarrow a = 8m \tag{3}$$
$$7|a + 1 = 8m + 1 = 7m + (m + 1) \Longrightarrow 7|m + 1 \tag{4}$$
$$6|a + 2 = 8m + 2 = 6m + 2(m + 1) \Longrightarrow 6|2(m + 1) \Longrightarrow 3|m + 1 \tag{5}$$
$$5|a + 3 = 8m + 3 = 5m + 3(m + 1) \Longrightarrow 5|3(m + 1) \Longrightarrow 5|m + 1 \tag{6}$$

Din (4), (5) şi (6) rezultă că $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105|m + 1 \Longrightarrow m + 1 = 105k, k \in N^*$. Cum a trebuie să fie cel mai mic luăm $k = 1$ deci $m = 104$.

Se obţine $a = 832, b = 833, c = 834, d = 835$.

BAREM

- clasa a V-a -

Problema 1.

oficiu 1p

$a = (2 \cdot 5)^9 \cdot (2 \cdot 25)^{10} = 10^9 \cdot 50^{10}$ 2p

$b = (3^2)^9 \cdot (7^2)^{10} = 9^9 \cdot 49^{10}$ 2p

$9^9 < 10^9$, $49^{10} < 50^{10}$ 1p

$a > b$ 1p

Total **7p**

Problema 2.

oficiu 1p

$\overline{a13} = 100a + 13 = M4 + 1$ 1p

$\overline{a31} = 100a + 31 = M4 + 3$ 1p

$u(21^{\overline{31a}}) = 1$ 1p

$u(32^{\overline{a13}}) = 2$ 1p

$u(43^{\overline{a31}}) = 7$ 1p

$u(b) = 0 \Rightarrow b$ este divizibil cu 10 .... 1p

Total **7p**

Problema 3.

oficiu 1p

$A \neq 0$, cub perfect $\Rightarrow A = b^3$, cu $b \in N^*$ 1p

$A < (100)^3 \Longrightarrow b < 100$ 1p

A par $\Longrightarrow b = 2 \cdot c$ 0.5p

$A = 8 \cdot c^3$, $1 \leq c \leq 49$ 1p

$A : 2 = (2 \cdot c)^2 \cdot c$ pătrat perfect $\Rightarrow c$ pătrat perfect 1p

$c \in \{1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49\}$ 1p

Sunt 7 numere 0.5p

Total **7p**

Problema 4.

oficiu 1p

$a,\ b = a + 1,\ c = a + 2,\ d = a + 3$ 0.5p

$8|a \Longrightarrow a = 8m$ 0.5p

$7|a + 1 \Longrightarrow 7|m + 1$ 1p

$6|a + 2 \Longrightarrow 3|m + 1$ 1p

$5|a + 3 \Longrightarrow 5|m + 1$ 1p

$105|m + 1 \Longrightarrow m + 1 = 105k, k \in N^*$ 1p

a cel mai mic $\Rightarrow k = 1$ 0.5p

$m = 104 \Longrightarrow a = 832, b = 833, c = 834, d = 835$ 0.5p

Total **7p**