Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 8 Martie 2014

CLASA a X–a

Problema 1. Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe ecuaţia

$$|z - |z+1|| = |z + |z-1||.$$

Gazeta Matematică

Problema 2. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia

$$x + \log_2\left(1 + \sqrt{\frac{5^x}{3^x + 4^x}}\right) = 4 + \log_{1/2}\left(1 + \sqrt{\frac{25^x}{7^x + 24^x}}\right).$$

Problema 3. Fie numerele naturale nenule p şi n, unde $p \geq 2$, şi fie numărul real a astfel încât $1 \leq a < a + n \leq p$. Să se arate că mulţimea

$$\left\{[\log_2 x] + [\log_3 x] + \cdots + [\log_p x] \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq a + n\right\}$$

are exact $n+1$ elemente.

Notă: $[\log_k x]$ reprezintă partea întreagă a numărului $\log_k x$.

Problema 4. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ cu proprietatea că

$$f(x + 3f(y)) = f(x) + f(y) + 2y, \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{Q}.$$

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 8 Martie 2014

SOLUŢII ŞI BAREMURI ORIENTATIVE

CLASA a X–a

Problema 1. Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $|z - |z+1|| = |z + |z-1||$.

Soluţie. Notăm $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$. Ecuaţia se scrie $(a - |z+1|)^2 + b^2 = (a + |z-1|)^2 + b^2$, de unde $a - |z+1| = \pm(a + |z-1|)$.

....**3 puncte**

Obţinem $2a = |z+1| - |z-1|$, echivalent cu $2a = \sqrt{(1+a)^2 + b^2} - \sqrt{(1-a)^2 + b^2}$.

....**1 punct**

Se observă că $a = 0$ verifică, şi orice $z = bi, b \in \mathbb{R}$ este soluţie.

....**1 punct**

Pentru $a \neq 0$, înmulţind cu $\sqrt{(1+a)^2 + b^2} + \sqrt{(1-a)^2 + b^2}$ deducem că $\sqrt{(1+a)^2 + b^2} + \sqrt{(1-a)^2 + b^2} = 2$, de unde $\sqrt{(1+a)^2 + b^2} = 1 + a$ şi $\sqrt{(1-a)^2 + b^2} = 1 - a$.

....**1 punct**

Pentru $|a| > 1$ nu avem soluţii. Pentru $a \in [-1, 1]$ obţinem $b = 0$, deci orice $z = a$, $a \in [-1, 1]$ este soluţie.

....**1 punct**

Problema 2. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x + \log_2\left(1 + \sqrt{\frac{5^x}{3^x+4^x}}\right) = 4 + \log_{1/2}\left(1 + \sqrt{\frac{25^x}{7^x+24^x}}\right)$.

Soluţie. Să observăm că $x = 2$ este soluţie.

....**1 punct**

Vom arăta că această soluţie este unică. Pentru $x > 2$ avem $(3/5)^x + (4/5)^x < (3/5)^2 + (4/5)^2 = 1$, de unde $5^x/(3^x + 4^x) > 1$, deci membrul stâng este mai mare strict decât 3.

....**3 puncte**

Pe de altă parte, $(7/25)^x + (24/25)^x < (7/25)^2 + (24/25)^2 = 1$, de unde $25^x/(7^x + 24^x) > 1$ şi $\log_{1/2}\left(1 + \sqrt{25^x/(7^x + 24^x)}\right) < \log_{1/2} 2 = -1$. Rezultă că membrul drept este mai mic strict decât 3, deci ecuaţia nu are soluţii în mulţimea $(2, \infty)$.

....**2 puncte**

În acelaşi mod se arată că niciun x din mulţimea $(-\infty, 2)$ nu este soluţie.

....**1 punct**

Problema 3. Fie numerele naturale nenule p şi n, unde $p \geq 2$, şi fie numărul real a astfel încât $1 \leq a < a+n \leq p$. Să se arate că mulţimea $\left\{[\log_2 x] + [\log_3 x] + \cdots + [\log_p x] \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq a+n\right\}$ are exact $n+1$ elemente.

Soluţie. Notăm $f(x) = \sum_{k=2}^{p} [\log_k x]$ şi $M = \{f(x) \mid x \in [a, a+n]\}$. Arătăm că $f(x) = f([x])$, $x \in [1, \infty)$, prin urmare $M = \{f(x) \mid x \in S\}$, unde mulţimea $S = \{[a], [a]+1, \ldots, [a]+n\}$ are exact $n+1$ elemente.

....**2 puncte**

Într-adevăr, pentru $x \in [1, \infty)$ şi $k \geq 2$ natural, avem echivalenţa $[\log_k x] = r \in \mathbb{N} \iff k^r \leq x < k^{r+1}$. Cum k^r este număr natural, avem $k^r \leq [x] \leq x < k^{r+1}$, deci $[\log_k [x]] = [\log_k x]$. Sumând după $k = 2, 3, \ldots, p$, rezultă că $f(x) = f([x])$, oricare ar fi $x \in [1, \infty)$.

....**2 puncte**

Rămâne de arătat că $f(s) < f(s+1)$, oricare ar fi $s \in S$, $s < [a]+n \leq p$. Din monotonia funcţiei logaritm şi a funcţiei parte întreagă deducem că $[\log_k (s+1)] \geq [\log_k s]$.

....**1 punct**

Fie $s \in S$, $s < [a]+n \leq p$. Avem $s+1 \in \{2, 3, \ldots, p\}$ şi $f(s+1) - f(s) = \sum_{k=2}^{p} ([\log_k (s+1)] - [\log_k s]) \geq [\log_{s+1} (s+1)] - [\log_{s+1} s] = 1$, de unde $f(s+1) > f(s)$ şi soluţia este completă.

....**2 puncte**

Problema 4. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ cu proprietatea că $f(x + 3f(y)) = f(x) + f(y) + 2y$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}$.

Soluţie. Funcţiile $f_k : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $k = 1, 2$, definite prin $f_1(x) = x$ şi $f_2(x) = -2x/3$ verifică cerinţa. Vom arăta că acestea sunt singurele soluţii.

....**2 puncte**

Pentru $x = y - 3f(y)$ obţinem $f(y - 3f(y)) = -2y$, $y \in \mathbb{Q}$.

....**1 punct**

Înlocuind y cu $y - 3f(y)$ în relaţia dată, avem $f(x - 6y) = f(x) - 2y + 2(y - 3f(y))$, de unde $f(x - 6y) = f(x) - 6f(y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Q}$.

....**1 punct**

Pentru $x = y = 0$ obţinem $f(0) = 0$. Pentru $x = 6y$ obţinem $f(6y) = 6f(y)$, oricare ar fi $y \in \mathbb{Q}$.

....**1 punct**

Atunci $f(x - 6y) = f(x) - f(6y)$, de unde, pentru $u = 6y$ şi $v = x - 6y$, rezultă că $f(u + v) = f(u) + f(v)$, oricare ar fi $u, v \in \mathbb{Q}$.

....**1 punct**

Deducem că $f(x) = xf(1)$, $x \in \mathbb{Q}$. Relaţia din enunţ impune $3f^2(1) - 2f(1) - 1 = 0$, prin urmare $f(1) = 1$ sau $f(1) = -2/3$, ceea ce încheie soluţia.

....**1 punct**