OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14. 02. 2015

Clasa a IX – a

PROBLEMA 1. Să se calculeze suma $S_n = 1 + 12 + 112 + ... + \underbrace{111\ldots1}_{(n-1)\text{ ori}}2$, pentru $n \geq 2$.

PROBLEMA 2. Fie numerele reale strict pozitive x, y şi z, astfel încât $2x + 3y + 4z = 6$. Să se arate că :

a) $\sqrt{2x} + \sqrt{3y} + \sqrt{4z} < \dfrac{9}{2}$;

b) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} + \dfrac{4}{z} \geq \dfrac{27}{2}$.

PROBLEMA 3. Arătaţi că $\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\,\right] = \left[\sqrt{4n+2}\,\right]$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ (cu $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului x).

PROBLEMA 4. Fie pentagonul convex $ABCDE$ şi punctele G_1 şi G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, respectiv BCD.

a) Arătaţi că dacă M şi N sunt mijloacele segmentelor $[AE]$, respectiv $[DE]$, atunci segmentele $[G_1N]$ şi $[G_2M]$ au un punct comun G, astfel încât $\dfrac{G_1G}{GN} = \dfrac{G_2G}{GM}$;

b) Aflaţi vectorul de poziţie al punctului G determinat anterior, în funcţie de vectorii de poziţie ai punctelor A, B, C, D şi E.

[1]Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2]Toate problemele sunt obligatorii;
[3]Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 14. 02. 2015
BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX – a

PROBLEMA 1.

(2p) $S_n = 1 + (11+1) + (111+1) + ... + \left(\underbrace{111\ldots1}_{n \text{ ori}} + 1\right)$

(1p) $S_n = \left(1 + 11 + 111 + ... + \underbrace{111\ldots1}_{n \text{ ori}}\right) + n - 1$

(2p) $S_n = \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n}\left(10^k - 1\right) + n - 1$

(2p) $S_n = \frac{1}{9}\left(10 \cdot \frac{10^n - 1}{9} - n\right) + n - 1 = S_n = \frac{10^{n+1} + 72n - 91}{81}$

PROBLEMA 2.

(2p) a) Din inegalitatea mediilor, avem:$\sqrt{1 \cdot 2x} \le \frac{1+2x}{2}$, $\sqrt{1 \cdot 3y} \le \frac{1+3y}{2}$, $\sqrt{4z} \le \frac{1+4z}{2}$

(1p) de unde, $\sqrt{2x} + \sqrt{3y} + \sqrt{4z} \le \frac{3 + (2x+3y+4z)}{2} = \frac{9}{2}$

(1p) Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$ şi $z = \frac{1}{4}$, valori care nu verifică relaţia $2x + 3y + 4z = 6$.

b) Notăm $S = \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{4}{z}$

(1p) $6S = (2x+3y+4z)\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{4}{z}\right) = 29 + 6\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 12\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + 8\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right)$

(1p) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2$, pentru $a, b \in (0, +\infty)$

(1p) Deci $6S \ge 81$, de unde $S \ge \frac{27}{2}$. Egalitatea are loc pentru $x = y = z = \frac{2}{3}$.

PROBLEMA 3.

(1p) Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{4n+2} = \sqrt{2(2n+1)} \notin \mathbb{N}$

(4p) Are loc: $\sqrt{4n+1} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2}$

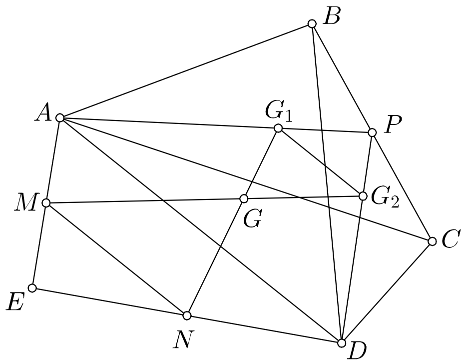
Într-adevăr, relaţia aceasta este echivalentă cu: $4n+1 < 2n+1+2\sqrt{n(n+1)} < 4n+2 \Leftrightarrow 2n < 2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1 \Leftrightarrow 4n^2 < 4n^2+4n < 4n^2+4n+1$, ceea ce este adevărat.

(2p) Avem $\left[\sqrt{4n+1}\,\right] = \left[\sqrt{4n+2}\,\right]$

Într-adevăr, dacă $\left[\sqrt{4n+2}\,\right] = a \in \mathbb{N}$, atunci $a \lneqq \sqrt{4n+2} < a+1 \Rightarrow a^2 \lneqq 4n+2 < (a+1)^2 \Rightarrow a^2 \leq 4n+1 < (a+1)^2 \Rightarrow a \leq \sqrt{4n+1} < a+1 \Rightarrow \left[\sqrt{4n+1}\,\right] = a$.

Aşadar, $\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\,\right] = \left[\sqrt{4n+2}\,\right]$.

PROBLEMA 4.



(1p) a) Dacă P este mijlocul segmentului $[BC]$, atunci $\dfrac{PG_1}{PA} = \dfrac{PG_2}{PD} = \dfrac{1}{3}$. Deci $G_1G_2 \parallel AD$ şi $\dfrac{G_1G_2}{AD} = \dfrac{1}{3}$

(1p) $MN \parallel AD$ şi $\dfrac{MN}{AD} = \dfrac{1}{2}$, deci $G_1G_2 \parallel MN$ şi $\dfrac{G_1G_2}{MN} = \dfrac{2}{3}$

(1p) În concluzie, pentru $[G_1N] \cap [G_2M] = \{G\}$, avem $\dfrac{G_1G}{GN} = \dfrac{G_2G}{GM} = \dfrac{2}{3}$

(1p) b) Pentru orice punct O din plan, avem $\overrightarrow{OG_1} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$

(1p) $\overrightarrow{ON} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}\right)$

(1p) $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{1+\dfrac{2}{3}} \cdot \overrightarrow{OG_1} + \dfrac{\dfrac{2}{3}}{1+\dfrac{2}{3}} \cdot \overrightarrow{ON} = \dfrac{3}{5} \cdot \overrightarrow{OG_1} + \dfrac{2}{5} \cdot \overrightarrow{ON}$

(1p) Aşadar, $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{5}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}\right)$

[1] Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;
[2] Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.