OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - BRĂILA, 22 februarie 2015
CLASA A XII-A

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție care admite primitive și F o primitivă a sa. Determinați funcția f astfel încât $\left(e^{2x}+1\right)\left(f(x)-F(x)\right)=e^{2x},\forall x\in\mathbb{R}$.

Costel Cerchez, Brăila

2. Fie $G=\left(\frac{1}{k},k\right)$, $k>1$ și legea de compoziție:

$$x*y=\frac{\frac{k^2+1}{k}xy-2(x+y)+\frac{k^2+1}{k}}{2xy-\frac{k^2+1}{k}(x+y)+\frac{k^4+1}{k^2}},\ \forall x,y\in G.$$

Să se arate că:

a) $(G,*)$ este grup;

b) Să se calculeze $x^{(n)}$, $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ și să se determine părțile stabile finite ale lui $(G,*)$;

c) Să se determine un automorfism strict descrescător al lui $(G,*)$.

Gheorghe Alexe, Brăila

3. Fie $(G,\cdot)$ un grup finit de ordin impar și H un subgrup propriu, necomutativ, al lui G. Să se arate că există două elemente distincte din $G\setminus H$ care comută.

Gazeta matematică

4. Să se calculeze $\int\frac{\sin 2x-tg^2x}{e^{tgx}+\sin^2 x}dx$, $x\in\left(\frac{\pi}{24},\frac{\pi}{3}\right)$.

Narcis Gabriel Turcu, Brăila

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - BRĂILA, 22 februarie 2015

CLASA A XII-A - Soluții

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție care admite primitive și F o primitivă a sa. Determinați funcția f astfel încât $\left(e^{2x}+1\right)\left(f\left(x\right)-F\left(x\right)\right)=e^{2x},\forall x\in\mathbb{R}$.

Costel Cerchez, Brăila

Soluție.

Inmultim relatia data cu $\dfrac{e^{-x}}{e^{2x}+1}$

și obținem $e^{-x}[f(x)-F(x)]=\dfrac{e^{x}}{e^{2x}+1}$

Aceasta relatie se rescrie

$$\left(e^{-x}\left[F\left(x\right)\right]\right)'=\frac{e^{x}}{e^{2x}+1}$$

și cum

$\displaystyle\int\frac{e^{x}}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x=\operatorname{arctg} e^{x}+C$, deducem că există $c\in\mathbb{R}$

astfel încât $e^{-x}\left[F\left(x\right)\right]=\operatorname{arctg} e^{x}+c$

Deci $F(x)=e^{x}$ arctg $e^{x}+ce^{x}$ si prin derivarea relatiei obtinem $f(x)$.

2. Fie $G=\left(\dfrac{1}{k},k\right)$, $k>1$ și legea de compoziție:

$$x*y=\frac{\dfrac{k^{2}+1}{k}xy-2\left(x+y\right)+\dfrac{k^{2}+1}{k}}{2xy-\dfrac{k^{2}+1}{k}\left(x+y\right)+\dfrac{k^{4}+1}{k^{2}}},\ \forall x,y\in G.$$

Să se arate că:

a) $\left(G,*\right)$ este grup;

b) Să se calculeze $x^{(n)}$, $n\in\mathbb{N}^{*}\setminus\{1\}$ și să se determine părțile stabile finite ale lui $\left(G,*\right)$;

c) Să se determine un automorfism strict descrescător al lui $\left(G,*\right)$.

Gheorghe Alexe, Brăila

Soluție.

1) ,,*'' se poate scrie : $x * y = \dfrac{k + \frac{1}{k}\left(\dfrac{x-k}{x-\frac{1}{k}}\right)\cdot\left(\dfrac{y-k}{y-\frac{1}{k}}\right)}{1+\left(\dfrac{x-k}{x-\frac{1}{k}}\right)\cdot\left(\dfrac{y-k}{y-\frac{1}{k}}\right)}$

Se verifica axiomele grupului

$-element\ neutru: e = \dfrac{k^2+1}{2k} \in G$

$-element\ simetric: x' = k + \dfrac{1}{k} - x \in G$

$(\forall) x \in G$

2) $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{,,n''\ ori} = x^{(n)} = \dfrac{k + (-1)^n . \frac{1}{k} . \left(\dfrac{x-k}{x-\frac{1}{k}}\right)^n}{1 + (-1)^n . \left(\dfrac{x-k}{x-\frac{1}{k}}\right)^n} \qquad n \geq 2, n \in N$

Se demonstreaza prin inductie completa

2) *Partile stabile finite ale lui G* $(\exists) m, n \in N^*, m \neq n \quad a.i.\ x^{(n)} = x^{(m)}$

$Fie\ t = \dfrac{x-k}{x-\frac{1}{k}}, \leq> (-t)^m = (-t)^n$

$Fie\ m > n \quad (-t)^n * [(-t)^{m-n} - 1] = 0$

$\leq> a) \quad (-t)^n = 0 \quad sau \quad b) \quad (-t)^{m-n} = 1$

$a) \quad (-t)^n = 0 <=> -t = 0 \qquad \dfrac{x-k}{x-\frac{1}{k}} = 0 <=> x = k \quad (fals)$

$x \in \left(\dfrac{1}{k}, k\right)$

$b) \quad (-t)^{m-n} = 1$

$1)\ m - n = impar => -t = 1 <=> t = -1$

$\dfrac{x-k}{x-\frac{1}{k}} = -1 \quad => x - k = -x + \dfrac{1}{k}$

$2x = k + \dfrac{1}{k} \quad => \quad x = \dfrac{k^2+1}{2k} = e \in \left(\dfrac{1}{k}, k\right)$

$2) m - n = par \ => \ -t = \pm 1 \quad =>$

$t = 1 \quad sau \quad t = -1$

$$\frac{x-k}{x-\frac{1}{k}}=1 \;=>\; -k=-\frac{1}{k}\;,k=\;\frac{1}{k}\;fals$$

$$\frac{x-k}{x-\frac{1}{k}}=-1\;=>x=\frac{k^2+1}{2k}=e\in G$$

$Deci\;singura\;parte\;stabila\;finita\;a\;lui\;G\;fata\;de\;,,*''\;este\;E=\{e\}=\left\{\frac{k^2+1}{2k}\right\}$

$E\;este\;un\;subgrup\;finit\;impropriu\;a\;lui\;G\;si\;este\;singurul.$

$(E,*)subgrup \quad \subset \quad (G,*)grup$

3) $f:(G,*)\;->\;(G,*)$

$f\;automorfism\;strict\;descrescator\;cautam\;un\;automorfism\;de\;forma:$

$f(x)=m*x+n$

1) $f\;bijectiva\;pe\left(\frac{1}{k},k\right)=G$

$(\forall)x,y\;\in G$

2) $f\;(x*y)=f(x)*f(y)$

X	$\frac{1}{k}$		$\frac{k^2+1}{2k}$		k
f(x)	k	↘	$\frac{k^2+1}{2k}$	↘	$\frac{1}{k}$

$$\lim_{\substack{x->\frac{1}{k}\\ x>\frac{1}{k}}}(m*x+n)=\frac{m}{k}+n=k=>m+k*n=\;k^2$$

$$\lim_{\substack{x->k\\ x<k}}\;(m*x+n)=m*k+n=\frac{1}{k}\;,m*k^2+n*k=1$$

$$\begin{cases} m+k*n=k^2\\ m*k^n+k*n=1\end{cases}\quad=>\quad\begin{cases} m=-1\\ n=\dfrac{k^2+1}{k}\end{cases}$$

$$f(x)=\;-x+\frac{k^2+1}{k}\quad,\qquad f:\left(\frac{1}{k},k\right)->\;\left(\frac{1}{k},k\right)$$

$f\searrow pe\;\left(\frac{1}{k},k\right)=>f\;injectiva\;\;pe\,G$

$f\;cont\;si\;f\;\left[\left(\frac{1}{k},k\right)\right]=\left(\frac{1}{k},k\right)=>f\;surjectiva\;pe\;G$

$=>$ 1) $f\;bijectiva\;pe\;G$

2) $f(x*y)=f(x)*f(y),\quad(\forall)x,y\;\in G$

$$f\;(x*y)=\;-(x*y)+\;\frac{k^2+1}{k}=$$

$$= -\left[\frac{k+\frac{1}{k}\left(\frac{x-k}{x-\frac{1}{k}}\right)\cdot\left(\frac{y-k}{y-\frac{1}{k}}\right)}{1+\left(\frac{x-k}{x-\frac{1}{k}}\right)\cdot\left(\frac{y-k}{y-\frac{1}{k}}\right)}\right]+k+\frac{1}{k}=$$

$$=\frac{\frac{1}{k}+k\left(\frac{x-k}{x-\frac{1}{k}}\right)\cdot\left(\frac{y-k}{y-\frac{1}{k}}\right)}{1+\left(\frac{x-k}{x-\frac{1}{k}}\right)\cdot\left(\frac{y-k}{y-\frac{1}{k}}\right)}=f(x*y)$$

$$f(x)*f(y)=\frac{k+\frac{1}{k}\left[\frac{f(x)-k}{f(x)-\frac{1}{k}}\right]\cdot\left[\frac{f(y)-k}{f(y)-\frac{1}{k}}\right]}{1+\left[\frac{f(x)-k}{f(x)-\frac{1}{k}}\right]\cdot\left[\frac{f(y)-k}{f(y)-\frac{1}{k}}\right]} =$$

$$=\frac{\frac{1}{k}+k\left(\frac{x-k}{x-\frac{1}{k}}\right)\cdot\left(\frac{y-k}{y-\frac{1}{k}}\right)}{1+\left(\frac{x-k}{x-\frac{1}{k}}\right)\cdot\left(\frac{y-k}{y-\frac{1}{k}}\right)}=f(x*y)$$

$$=> f(x*y)=f(x)*f(y) \quad (\forall)x,y\in G$$

$$\left.\begin{array}{l} -f\ bijectiva\ pe\ G \\ -f\ endomorfism\ pe\ (G,*) \end{array}\right\} =>$$

$$=> f\ automorfism\ pe\ grupul\ (G,*)\ strict\ descrescator$$

3. Fie $(G,\bullet)$ un grup finit de ordin impar și H un subgrup propriu, necomutativ, al lui G. Să se arate că există două elemente distincte din $G\setminus H$ care comută.

Gazeta matematică

Soluție.

Fie $x\in G\setminus H \Rightarrow x^{-1}\in G\setminus H$ și $x\neq x^{-1}$ deoarece grupul are ordin impar.Cum x și x^{-1} comută, problema este rezolvată.

4. Să se calculeze $\int \frac{\sin 2x - tg^2 x}{e^{tgx} + \sin^2 x} dx$, $x \in \left(\frac{\pi}{24}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Narcis Gabriel Turcu, Brăila

Soluție.

$f : \left(\frac{\pi}{24}, \frac{\pi}{3}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{tgx} + \sin^2 x$

$f'(x) = \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x} + \sin 2x$

$f'(x) - \frac{f(x)}{\cos^2 x} = \sin 2x - tg^2 x$

$$\int \frac{\sin 2x - tg^2 x}{e^{tgx} + \sin^2 x} dx == \int \frac{f'(x) - \frac{f(x)}{\cos^2 x}}{f(x)} dx = \int \left(\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \ln\left(e^{tgx} + \sin^2 x\right) - tgx + C.$$