Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 9 Martie 2013

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VII-a

Problema 1. Arătaţi că ecuaţia:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{1006}}+\frac{1}{\sqrt{2012-x}+\sqrt{1006}}=\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{2012-x}}$$

are 2013 soluţii în mulţimea numerelor întregi.

Gazeta Matematică

Soluţia 1. Pentru existenţa radicalilor este necesar ca $0 \le x \le 2012$. **2p**
În acest caz, pentru $x \neq 1006$ ecuaţia devine

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{1006}}{x-1006}+\frac{\sqrt{2012-x}-\sqrt{1006}}{1006-x}=\frac{2(\sqrt{x}-\sqrt{2012-x})}{2x-2012}$$

egalitate adevărată pentru orice $x \neq 1006$. Ca urmare, numerele întregi 0, 1, 2, ..., 1005, 1007, 1008, ..., 2012 sunt soluţii ale ecuaţiei. **4p**
Întrucât şi $x = 1006$ verifică egalitatea din enunţ, rezultă că ecuaţia are 2013 soluţii întregi, şi anume $0, 1, 2, \dots, 2012$ **1p**

Soluţia 2. Pentru existenţa radicalilor este necesar ca $0 \le x \le 2012$. **2p**
Notăm $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{1006}$ şi $c = \sqrt{2012-x}$. Atunci $a^2 + c^2 = 2b^2$. Egalitatea din enunţ devine

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+b}=\frac{2}{a+c},$$

egalitate echivalentă cu $(a+c)(b+c)+(a+b)(a+c) = 2(a+b)(b+c) \Leftrightarrow a^2+c^2 = 2b^2$. ... **4p**
Deci ecuaţia are 2013 soluţii întregi, şi anume $0, 1, 2, \dots, 2012$ **1p**

Problema 2. Determinaţi perechile de numere reale (a, b) pentru care egalitatea

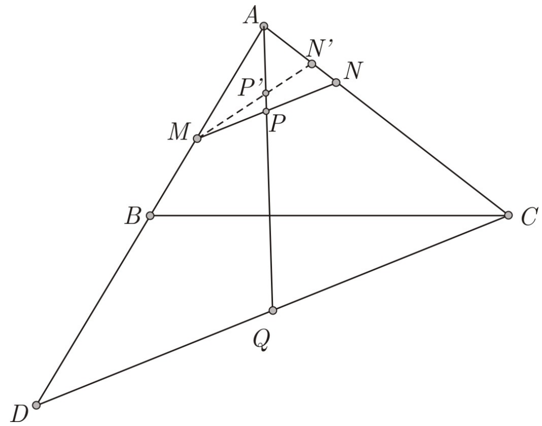
$$|ax+by|+|bx+ay| = 2|x|+2|y|$$

este adevărată pentru orice numere reale x şi y.

Soluţie. Pentru $x = y = 1$ rezultă că $|a+b| = 2$, deci $a+b \in \{-2; 2\}$ **(1)**
Pentru $x = 1$, $y = -1$ rezultă că $|a-b| = 2$, deci $a-b \in \{-2; 2\}$**(2)** **3p**
Din aceste relaţii se obţine că $(a, b) \in \{(2,0); (0,2); (-2,0); (0,-2)\}$ **2p**
În fiecare din aceste cazuri se verifică faptul că egalitatea din enunţ este adevărată pentru orice numere reale x şi y. **2p**
Notă. *Se acordă **2 puncte** pentru obţinerea uneia dintre relaţiile **(1)** şi **(2)***

Problema 3. Pe laturile (AB) şi (AC) ale triunghiului ABC se consideră punctele M śi respectiv N astfel încât $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ANM$. Punctul D este simetricul punctului A faţă de B, iar P şi Q sunt mijloacele segmentelor $[MN]$ şi respectiv $[CD]$.
Demonstraţi că punctele A, P şi Q sunt coliniare dacă şi numai dacă $AC = AB\sqrt{2}$.

Soluţia 1.



„$\Longleftarrow$" Triunghiurile AMN şi ACB sunt asemenea, deci $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}$, rezultă că $\frac{AM}{AN} = \sqrt{2}$ ... **1p**

Cum $\frac{AD}{AC} = \frac{2AB}{AC} = \sqrt{2}$, rezultă că $\frac{AM}{AN} = \frac{AD}{AC} \Leftrightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{AN}{AC}$ **1p**

Ca urmare, $MN \| CD$, de unde rezultă că A, P şi Q sunt coliniare. **1p**

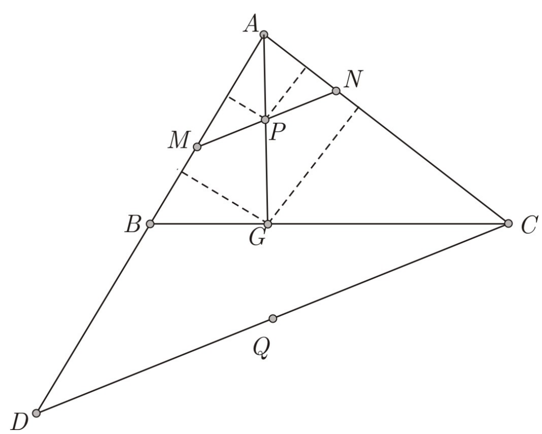
„$\Longrightarrow$" Vom arăta că $MN \| CD$. Presupunând contrariul, fie $N' \in (AC)$, $N' \neq N$ astfel încât $MN' \| CD$ şi $\{P'\} = MN' \cap AQ$. Atunci P' este mijlocul lui $[MN']$, deci $[PP']$ este linie mijlocie în triunghiul MNN'. Rezultă că $PP' \| NN'$, absurd, deoarece $PP' \cap NN' = \{A\}$. **2p**

Din $MN \| CD$ rezultă că $\frac{AM}{AD} = \frac{AN}{AC} \Leftrightarrow \frac{AM}{AN} = \frac{2AB}{AC}$.

Dar $\Delta AMN \sim \Delta ACB$, rezultă că $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB} \Rightarrow \frac{AM}{AN} = \frac{AC}{AB}$.

Rezultă că $\frac{2AB}{AC} = \frac{AC}{AB}$, de unde $AC = AB\sqrt{2}$. **2p**

Soluţia 2.



Fie $G = AP \cap BC$. Deoarece $\Delta AMN \sim \Delta ACB$, rezultă $\frac{AN}{AM} = \frac{AB}{AC}$.

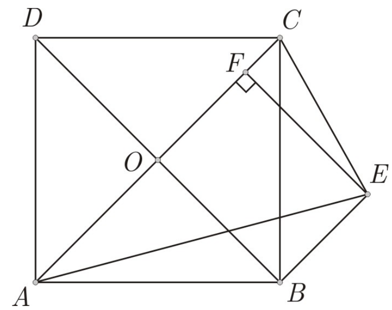
Deoarece P este mijlocul segmentului $[MN]$, rezultă că $\mathcal{A}_{AMP} = \mathcal{A}_{ANP}$, de unde $\frac{d(P,AB)}{d(P,AC)} = \frac{AN}{AM} = \frac{AB}{AC}$. **2p**

Pe de altă parte $\frac{AP}{AG} = \frac{d(P,AB)}{d(G,AB)} = \frac{d(P,AC)}{d(G,AC)}$, deci $\frac{d(G,AB)}{d(G,AC)} = \frac{d(P,AB)}{d(P,AC)} = \frac{AB}{AC}$. De aici $\frac{BG}{CG} = \frac{\mathcal{A}_{ABG}}{\mathcal{A}_{AGC}} = \frac{AB^2}{AC^2}$. **3p**

$AC = AB\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{BG}{CG} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow G$ este centrul de greutate al triunghiului $ACD \Leftrightarrow$ A, P şi Q sunt coliniare. **2p**

Problema 4. Se consideră pătratul $ABCD$ şi punctul E în interiorul unghiului $\sphericalangle CAB$, astfel încât măsura unghiului $\sphericalangle BAE$ este de 15°, iar dreptele BE şi BD sunt perpendiculare. Demonstraţi că $AE = BD$.

Soluţia 1.

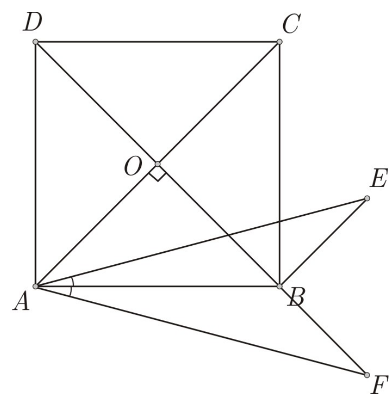


Cum unghiurile $\sphericalangle ACB$ şi $\sphericalangle CBE$ au măsurile de $45°$, rezultă că dreptele AC şi BE sunt paralele. **1p**

Fie F proiecţia lui E pe AC. Atunci $EF = BO = \frac{BD}{2}$ **2p**

Triunghiul FAE este dreptunghic în F şi are unghiul $\sphericalangle FAE$ de $30°$.
Deducem că $AE = 2EF = BD$ **4p**

Soluţia 2.

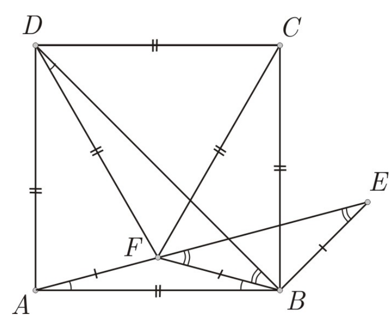


Fie $F \in DB$ astfel încât $(AB$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle FAE$.

Atunci $\Delta FAB \equiv \Delta EAB$ (U.L.U.), de unde $[AE] \equiv [AF]$ **3p**

Triunghiul dreptunghic OAF are unghiul $\sphericalangle AFO$ de $30°$. Rezultă că $AF = 2AO = AC$. Ca urmare $BD = AC = AF = AE$. **4p**

Soluţia 3.



Fie F în interiorul pătratului astfel încât triunghiul CFD este echilateral. În triunghiul isoscel DAF unghiul $\sphericalangle ADF$ este de $30°$, deci $m(\sphericalangle FAB) = 15°$, ca urmare $F \in AE$.
.... **3p**

Analog $m(\sphericalangle ABF) = 15°$. Iar $m(\sphericalangle BFE) = 30°$, pe de altă parte $m(\sphericalangle AEB) = 180° - 15° - 135° = 30°$, deci $BE = BF$. **2p**

$m(\sphericalangle DBF) = 30°$, deci $m(\sphericalangle DBF) = 135° = m(\sphericalangle ABE)$, $EB = FB$ şi $AB = DF$, deci $\Delta BFD \equiv \Delta EBA$. Ca urmare $AE = BD$. **2p**