Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

CLASA a VIII a

Subiect 1

a) Stabiliți dacă numărul $A=\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{7}{9\cdot 16}+\frac{9}{16\cdot 25}+\frac{11}{25\cdot 36}$ aparține intervalului $\left(\frac{1}{9};\frac{1}{3}\right)$.

b) Dacă $x,y\in R$, astfel încât $x\in(-2;6)$ și $y\in(-5;3)$, arătați că numărul

$B=\sqrt{(x+y-9)^2}+\sqrt{(x+y+7)^2}$ este pătrat perfect.

Subiect 2

a) Raționalizați fracția: $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

b) Să se determine $n\in N^*$ astfel încât:

$$\frac{\sqrt{1}}{1+\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}+...+\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=45.$$

Subiect 3

Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă patrulateră regulată cu $AB=6\ cm$. Se știe că M este mijlocul lui (BB'), N este mijlocul lui (AA'), iar măsura unghiului dintre dreptele CM și $B'N$ este egală cu 60^0.

a) Calculați perimetrul triunghiului AMC.

b) Determinați distanța de la M la mijlocul segmentului (AD').

c) Să se arate că oricum am considera 9 puncte în interiorul prismei,există două dintre ele aflate la o distanță de cel mult $3\sqrt{6}$ cm unul față de celălalt.

Subiect 4

Pe muchiile $[SA_1],[SA_2],...,[SA_n]$ ale piramidei $SA_1A_2...A_n$ cu baza poligonul $A_1A_2...A_n$ se iau respectiv punctele $B_1,B_2,...,B_n$ astfel încât patrulaterele $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$,..., $A_{n-1}A_nB_nB_{n-1}$ să fie inscriptibile. Să se arate că și patrulaterul $A_1A_nB_nB_1$ este inscriptibil.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iaşi, 23 ianuarie 2015

Clasa a VIII a

BAREM

Subiect 1 a) Stabiliți dacă numărul $A=\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{7}{9\cdot 16}+\frac{9}{16\cdot 25}+\frac{11}{25\cdot 36}$ aparține intervalului $\left(\frac{1}{9};\frac{1}{3}\right)$.

b) Dacă $x,y\in R$ astfel încât $x\in(-2;6)$ şi $y\in(-5;3)$, arătati că numărul $B=\sqrt{(x+y-9)^2}+\sqrt{(x+y+7)^2}$ este pătrat perfect.

Soluție și barem

a) Utilizând $\frac{k}{n(n+k)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}$, obține: $A=\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{25}-\frac{1}{36}=\frac{2}{9}$ *2p*

Arată $\frac{2}{9}\in\left(\frac{1}{9};\frac{1}{3}\right)$ *1p*

b) Obține $B=|x+y-9|+|x+y+7|$ *1p*

Din $x<6$ şi $y<3\Rightarrow|x+y-9|=9-x-y$ *1p*

Din $x>-2$ şi $y>-5\Rightarrow|x+y+7|=x+y+7$ *1p*

Finalizare $B=16$, pătrat perfect................*1p*

Subiect 2 a) Raționalizați fracția: $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

b) Să se determine $n\in N^*$ astfel încât:

$$\frac{\sqrt{1}}{1+\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}+\ldots+\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=45.$$

Prof. Cătălin Budeanu

Soluție și barem

a) Prin amplificare cu $\sqrt{3}-(\sqrt{2}+1)$ obține

$\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2}-1)}{-2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{3}}{2}$ *2p*

b) $\frac{\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}-1)}{-2\sqrt{k}}=\frac{\sqrt{k}+1-\sqrt{k+1}}{2}$ *1p*

Suma din membrul stâng este egală cu $\frac{1}{2}\cdot\left(n+1-\sqrt{n+1}\right)$ *2p*

Egalează rezultatul cu 45 şi obține $\sqrt{n+1} \in \{-9;10\}$ 1p

Finalizare: n=99.......... 1p

Subiect 3 Fie *ABCDA'B'C'D'* o prismă patrulateră regulată cu *AB=6 cm*. Se ştie că *M* este mijlocul lui (*BB'*), *N* este mijlocul lui (*AA'*), iar măsura unghiului dintre dreptele *CM* şi *B'N* este egală cu 60^0.

a) Calculați perimetrul triunghiului *AMC*.

b) Determinați distanța de la M la mijlocul segmentului (*AD'*).

c) Să se arate că oricum am considera 9 puncte în interiorul prismei, există două dintre ele aflate la o distanță de cel mult $3\sqrt{6}$ cm unul față de celălalt.

Soluție şi barem

a) $AM \parallel B'N \Rightarrow m(\sphericalangle AMC) = 60^0$.......... 1p

ΔAMC echilateral şi $P_{AMC} = 3 \cdot 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$ cm.......... 2p

b) Fie Q mijlocul lui (AD').Arata că $\Delta AMD'$ este dreptunghic.......... 1p

MQ mediană deci $MQ = \dfrac{AD'}{2} = 3\sqrt{5}$ cm.......... 1p

c) Împarte prisma în 8 prisme având dimensiunile de 3, 3, 6 şi diagonala egala cu $3\sqrt{6}$ 1p

Aplică principiul cutiei şi finalizează.......... 1p

Subiect 4 Pe muchiile $[SA_1],[SA_2],...,[SA_n]$ ale piramidei $SA_1A_2...A_n$ cu baza poligonul $A_1A_2...A_n$ se iau respectiv punctele $B_1, B_2, ..., B_n$ astfel încât patrulaterele $A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2, ..., A_{n-1}A_nB_nB_{n-1}$ să fie inscriptibile. Să se arate că şi patrulaterul $A_1A_nB_nB_1$ este inscriptibil.

Prof. T.Superceanu

Soluție şi barem

$A_1A_2B_2B_1$ inscriptibil $\Rightarrow \Delta SA_1A_2 \sim \Delta SB_2B_1 \Rightarrow SA_1 \cdot SB_1 = SA_2 \cdot SB_2$.......... 2p

Analog obține $SA_2 \cdot SB_2 = SA_3 \cdot SB_3 = ... = SA_n \cdot SB_n$.......... 2p

Deduce $SA_1 \cdot SB_1 = SA_n \cdot SB_n$ care implică $\dfrac{SA_1}{SB_n} = \dfrac{SA_n}{SB_1}$ 1p

Demonstrează că $\Delta SA_1A_n \sim \Delta SB_nB_1$ 1p

Finalizează obținând că patrulaterul $A_1A_nB_nB_1$ este inscriptibil.......... 1p

Notă: Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.