Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală – Vaslui, 15 februarie 2015

Clasa a VII-a

Problema 1. a) Se dă numărul $\overline{147abc}$ care este pătrat perfect. Calculați $\sqrt{6\sqrt{\overline{147abc}}}$.

b) Determinați numerele raționale x și y care verifică relația $(4+\sqrt{50})y - (2-\sqrt{8})x = 5+\sqrt{32}$.

Problema 2. Să se determine numărul natural nenul x, astfel încât $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{x}}{3\sqrt{3}-\sqrt{x}} \in \mathbb{Z}$.

Problema 3. Se dă triunghiul ABC cu AB > AC, iar punctul G este centrul de greutate. Fie punctele E și P simetricele punctului G față de dreapta BC respectiv față de punctul M, mijlocul laturii (BC), și GE ∩ BC = {D}. Dacă punctul H este mijlocul segmentului (AE), demonstrați că:

a) patrulaterul GHDM este paralelogram;

b) patrulaterul BCEP este trapez isoscel.

Problema 4. Se consideră un triunghi ABC și punctele M, N, P pe laturile [BC], [AC], respectiv [AB] astfel încât :$\frac{BM}{BC} = \frac{CN}{CA} = \frac{AP}{AB} = \frac{1}{3}$. Dacă E este mijlocul lui [NP] și F este mijlocul lui [BC], demonstrați că EF este paralelă cu AM și $EF=\frac{1}{2}\cdot AM$.

Gazeta Matematică

Notă. Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 1 la 7 puncte.

Din oficiu se acordă 4 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală – Vaslui, 15 februarie 2015

Soluții și bareme orientative - Clasa a VII-a

Problema 1. a) Se dă numărul $\overline{147abc}$ care este pătrat perfect. Calculați $\sqrt{6\sqrt{\overline{147abc}}}$.

b) Determinați numerele raționale x și y care verifică relația $(4+\sqrt{50})y - (2-\sqrt{8})x=5+\sqrt{32}$.

Soluție. 1p din oficiu

a) Avem $147000<\overline{147abc}<147999$ și $\overline{147abc}=k^2$, $k\in \mathbb{N}$ **(1p)**

Obținem k=384 **(1p).** Calculând $\sqrt{6\sqrt{\overline{147abc}}}=\sqrt{6\cdot 384}=48$**(1p)**

b)Se obține $4y+5\sqrt{2}y-2x+2\sqrt{2}x=5+4\sqrt{2}$ **(1p)** de unde $(4y-2x)+(5y+2x)\sqrt{2}=5+4\sqrt{2}$**.(0,5p)**

Obținem $4y-2x=5$ și $5y+2x=4$ **(0,5p)** de unde $x=\frac{-1}{2}$ și y=1(**1p**).

Problema 2. Să se determine numărul natural nenul x, astfel încât $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{x}}{3\sqrt{3}-\sqrt{x}}\in \mathbb{Z}$.

Soluție. 1p din oficiu

$\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{x}}{3\sqrt{3}-\sqrt{x}}=a$, unde $a\in \mathbb{Z}$ (**1p**) . Rezultă $\sqrt{\frac{3}{x}}=\frac{2+a}{3a-1}\in \mathbb{Q}$, de unde $x=3p^2$, $p\in \mathbb{N}^*$ (**1p**)

Obținem $a=\frac{2p+1}{3-p}\in \mathbb{Z}$ (**1p**)$\rightarrow 3-p|2p+1$(**0,5p**) și cum $3-p|3-p$ obținem $3-p|7$(**1p**)

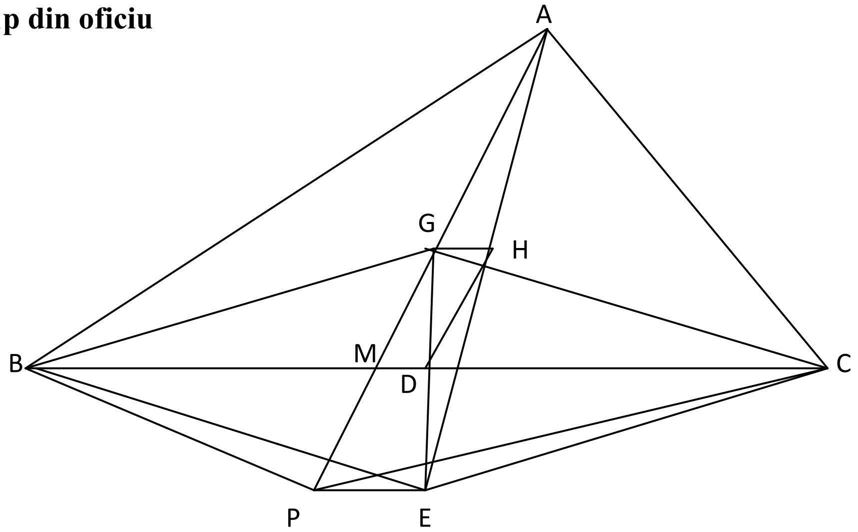
Rezultă $p\in\{2;4;10\}$**(1p).** Deci $x\in\{12;48;300\}$ **(0,5p)**

Problema 3. Se dă triunghiul ABC cu AB > AC, iar punctul G este centrul de greutate. Fie punctele E și P simetricele punctului G față de dreapta BC respectiv față de punctul M, mijlocul laturii (BC), și GE ∩ BC = {D}. Dacă punctul H este mijlocul segmentului (AE), demonstrați că:

a) patrulaterul GHDM este paralelogram;

b) patrulaterul BCEP este trapez isoscel.

Soluție. 1p din oficiu



a) G-centrul de greutate ΔABC → GM=$\frac{AG}{2}$ și GM=MP → G mijlocul lui (AP) **(1p).**

Dar H mijlocul segmentului(AE) →(GH) linie mijlocie în triunghiul APE →GH=$\frac{PE}{2}$ și GH||PE(1)… **(0,5p).** Cum M este mijlocul lui (GP), D mijlocul lui (GE) →(MD) linie mijlocie în triunghiul GPE.

Obținem MD=$\frac{PE}{2}$ si MD||PE(2) **(1p)** . Din relațiile (1) și (2) rezultă GH||MD și GH=MD, de unde GHDM este paralelogram **(0,5p).**

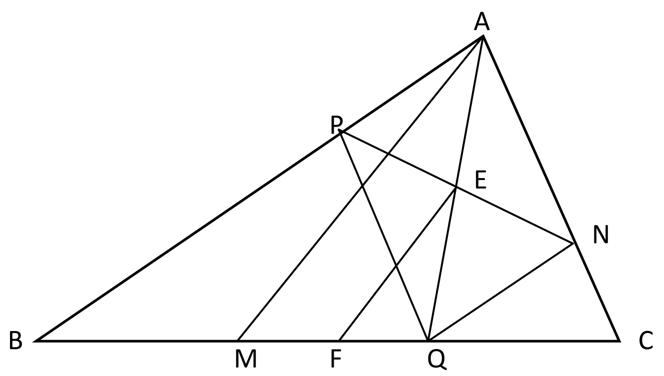
b) PE||BC→BCEP este trapez **(0,5p**)

Punctul M este mijlocul segementelor (BC) și (GP) →patrulaterul BGCP este paralelogram **(1p)** rezultă că BG=PC. Dar dreapta BD este mediatoarea segmentului(GE) →BG=BE **(1p).** Obținem BE=PC deci trapezul BCEP este isoscel **(0,5p)**

Problema 4. Se consideră un triunghi ABC și punctele M, N, P pe laturile [BC], [AC], respectiv [AB] astfel încât :$\frac{BM}{BC} = \frac{CN}{CA} = \frac{AP}{AB} = \frac{1}{3}$. Dacă E este mijlocul lui [NP] și F este mijlocul lui [BC], demonstrați că EF este paralelă cu AM și EF=$\frac{1}{2} \cdot AM$.

Gazeta Matematică

Soluție. 1p din oficiu



Fie punctul Q pa latura (BC) astfel încât QC $= \frac{BC}{3}$ **(0,5p)** dar $\frac{CN}{CA} = \frac{1}{3}$ de unde, conform teoremei reciproce a lui Thales$\Rightarrow$QN$||$AB(1) (**1p**) .Obținem QB $= \frac{2}{3} \cdot BC$ și BP $= \frac{2}{3} \cdot BA$ $\Rightarrow$prin teorema reciprocă a lui Thales PQ$||$AC (2) (**1p).** Din (1) și (2) obținem APQN paralelogram **(0,5p) .** Punctul E fiind mijlocul diagonalei(PN) $\rightarrow$ E este și mijlocul diagonalei (AQ) **(1p).** Avem F mijlocul lui [BC], iar BM = QC $\rightarrow$F este mijlocul segmentului [QM] (**1p**). Obținem că segmentul [EF] este linie mijlocie în ΔAMQ de unde EF$||$AM și EF=$\frac{AM}{2}$ **(1p).**