



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
22 februarie 2014**

CLASA a VIII-a

SUBIECTUL I (7p)

(3p) **a)** Se consideră numărul $A = n^2 - n - 12$, $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că, dacă A este divizibil cu 7, atunci A este divizibil cu 98.

(4p) **b)** Să se arate că numărul $B = n^2 + 10n - 3$ nu este divizibil cu 196, pentru orice valoare naturală a numărului n .

SUBIECTUL II (7p)

(1p) **a)** Stabiliți dacă $\frac{1}{\sqrt{2014}} < \frac{2}{\sqrt{2014} + \sqrt{2013}} < \frac{1}{\sqrt{2013}}$.

(3p) **b)** Arătați că $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$, pentru orice valoare naturală nenulă a numărului n .

(3p) **c)** Demonstrați că $\frac{1}{\sqrt{100}} + \frac{1}{\sqrt{101}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{120}} > \frac{1}{\sqrt{145}} + \frac{1}{\sqrt{146}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{169}}$.

SUBIECTUL III (7p)

Se consideră cubul $ABCA'B'C'D'$. Punctele P , Q și R sunt proiecțiile punctului A pe dreptele $A'D$, $A'B$ și respectiv $A'C$.

(4p) **a)** Să se arate că dreapta $A'C$ este perpendiculară pe planul (PQR) ;

(3p) **b)** Să se calculeze aria triunghiului PQR , pentru $AB = a$ cm, $a > 0$.

SUBIECTUL IV (7p)

Fie A , B , C și D patru puncte necoplanare așa încât $AB = 6$ cm, $AC = AD = 6\sqrt{2}$ cm și $m\angle(DAB) = m\angle(BAC) = m\angle(CAD) = 90^\circ$.

(2p) **a)** Să se calculeze aria triunghiului BCD ;

(5p) **b)** Să se afle lungimea segmentului AE , unde E este proiecția punctului A pe planul (BCD) .

Notă:

- **Toate subiectele sunt obligatorii**
- **Timp de lucru: 3 ore**



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
22 februarie 2014

CLASA a VIII-a

Bareme de corectare

SUBIECTUL I

(3p) **a)** Se consideră numărul $A = n^2 - n - 12$, $n \in \mathbf{N}$. Să se arate că, dacă A este divizibil cu 7, atunci A este divizibil cu 98.

(4p) **b)** Să se arate că numărul $B = n^2 + 10n - 3$ nu este divizibil cu 196, pentru orice valoare naturală a numărului n.

Soluție

a) $A = (n+3)(n-4)$, **(1p)**; $7/(n+3) \Leftrightarrow 7/(n-4)$ și $2/(n+3)(n-4)$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$ **(1p)**; finalizare **(1p)**.

b) $B = (n+5)^2 - 28$, **(1p)**; Presupunem $196/B \Rightarrow B = 196k$, $k \in \mathbf{N}$. Deci

$(n+5)^2 - 28 = 196k \Leftrightarrow (n+5)^2 = 28(7k+1)$, **(1p)**;

$7/(n+5)$ și avem $(7p)^2 = 28(7k+1) \Leftrightarrow 7p^2 = 4(7k+1)$, $p \in \mathbf{N}$ **(1p)**. Finalizare **(1p)**

SUBIECTUL II

(1p) **a)** Stabiliți dacă $\frac{1}{\sqrt{2014}} < \frac{2}{\sqrt{2014} + \sqrt{2013}} < \frac{1}{\sqrt{2013}}$.

(3p) **b)** Arătați că $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$, pentru orice valoare naturală nenulă a numărului n.

(3p) **c)** Demonstrați că $\frac{1}{\sqrt{100}} + \frac{1}{\sqrt{101}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{120}} > \frac{1}{\sqrt{145}} + \frac{1}{\sqrt{146}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{169}}$.



Soluție

a) Avem

$$\frac{2}{2\sqrt{2014}} < \frac{2}{\sqrt{2014} + \sqrt{2013}} < \frac{2}{2\sqrt{2013}} \Leftrightarrow \sqrt{2014} + \sqrt{2014} > \sqrt{2014} + \sqrt{2013} > \sqrt{2013} + \sqrt{2013}. \text{(1p)}$$

$$\text{b) Avem } \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ (1p); } \frac{2}{2\sqrt{n+1}} < \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{2}{2\sqrt{n}} \text{ (1p)}$$

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n} > \sqrt{n} + \sqrt{n}, \text{ finalizare (1p)}$$

$$\text{c) Fie } x = \frac{1}{\sqrt{100}} + \frac{1}{\sqrt{101}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{120}} > 2(\sqrt{101} - \sqrt{100}) + 2(\sqrt{102} - \sqrt{101}) + \dots + 2(\sqrt{121} - \sqrt{120}) = 2,$$

(1p) și

$$y = \frac{1}{\sqrt{145}} + \frac{1}{\sqrt{146}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{169}} < 2(\sqrt{145} - \sqrt{144}) + 2(\sqrt{146} - \sqrt{145}) + \dots + 2(\sqrt{169} - \sqrt{168}) = 2, \text{ (1p).}$$

Finalizare (1p)

SUBIECTUL III

Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$. Punctele P, Q și R sunt proiecțiile punctului A pe dreptele $A'D$, $A'B$ și respectiv $A'C$.

(4p) a) Să se arate că dreapta $A'C$ este perpendiculară pe planul (PQR) ;

(3p) b) Să se calculeze aria triunghiului PQR, pentru $AB = a \text{ cm}$, $a > 0$.

Soluție

$$\text{a) } AP \perp A'D, AP \perp DC \Rightarrow AP \perp (A'DC) \text{ (1p)}$$

$$AP \perp A'C, AR \perp A'C \Rightarrow A'C \perp (APR) \Rightarrow A'C \perp PR \text{ (1p)}$$

$$\text{Analog } A'C \perp (ARQ) \Rightarrow A'C \perp QR \text{ sau } PQ \parallel BD \text{ și } BD \perp A'C \Rightarrow PQ \perp A'C \text{ (1p)}$$

Finalizare (1p)

$$\text{b) } PQ = \frac{a\sqrt{2}}{2}, (\Delta A'BD) \text{ (1p)}$$



$$RQ = \frac{a\sqrt{6}}{6}, (\Delta A'BC); \quad RP = \frac{a\sqrt{6}}{6}, (\Delta A'DC) \quad (1p)$$

$$A_{\Delta PQR} = \frac{a^2\sqrt{3}}{24} \quad (1p)$$

SUBIECTUL I V

Fie A, B, C și D patru puncte necoplanare așa încât $AB = 6\text{cm}$, $AC = AD = 6\sqrt{2}\text{ cm}$ și $m\angle(DAB) = m\angle(BAC) = m\angle(CAD) = 90^\circ$.

(2p) **a)** Să se calculeze aria triunghiului BCD;

(5p) **b)** Să se afle lungimea segmentului AE, unde E este proiecția punctului A pe planul (BCD) .

Soluție

$$\mathbf{a)} \quad BC = BD = 6\sqrt{3}, \quad CD = 12 \quad (1p)$$

$$A_{\Delta BCD} = 36\sqrt{2} \quad (1p)$$

b) Demonstrează că punctul E este ortocentrul triunghiului BCD. **(2p)**

Fie $BM \perp CD$, $DN \perp BC$, $M \in CD$, $N \in BC$, avem:

$$BM = 6\sqrt{2}, \quad DN = 4\sqrt{6}, \quad BN = 2\sqrt{3} \quad (1p)$$

$$\Delta BNE \sim \Delta BMC, \quad BE = 3\sqrt{2} \quad (1p). \text{ Finalizare } AE = 3\sqrt{2}, \quad (1p)$$