

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
22 februarie 2014

CLASA a IX-a

1. Să se determine funcțiile $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ care satisfac relația $\frac{f^2(n)}{n+f(n)} + \frac{n}{f(n)} = \frac{1+f(n+1)}{2}$,
oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se dă șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, definit prin $a_n = \frac{x^{n+1} + y^{n+1}}{x^n + y^n} + \frac{y^{n+1} + z^{n+1}}{y^n + z^n} + \frac{z^{n+1} + x^{n+1}}{z^n + x^n}$, unde x, y, z
sunt numere reale strict pozitive. Demonstrați că: $a_{n+1} + a_{n-1} \leq 2a_n, \forall n \geq 2$.

3. Fie ABCD un patrulater și punctele M, N, P, Q astfel încât $\overline{AM} = \overline{MB}, \overline{BN} = 3\overline{NC},$
 $\overline{DP} = \overline{PC}, \overline{DQ} = -\frac{1}{4}\overline{AD}$. Să se arate că dreapta MP trece prin mijlocul segmentului [NQ].

4. În dreptunghiul ABCD punctul E este mijlocul laturii BC, iar punctele diferite F și G
aparțin segmentului [AB], astfel că AF=FG. Dreptele EF și CG intersectează dreptele AC,
respectiv AD în punctele M și respectiv N. Să se demonstreze că dreptele MN și BD sunt
paralele.

- Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.**
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 22 februarie 2014
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE-CLASA a IX-a

1. Să se determine funcțiile $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ care satisfac relația $\frac{f^2(n)}{n+f(n)} + \frac{n}{f(n)} = \frac{1+f(n+1)}{2}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

G.M. 9/2013

Soluție. Notăm $f(1) = k \in \mathbb{N}^*$ și pentru $n=1$ relația din enunț devine $\frac{k^2}{k+1} + \frac{1}{k} = \frac{1+f(2)}{2} \Leftrightarrow \frac{2k^3 + 2k + 2}{k^2 + k} = 1 + f(2) \Leftrightarrow 2k - 2 + \frac{4k + 2}{k^2 + k} = 1 + f(2) \Rightarrow k^2 + k / 4k + 2 \Rightarrow k^2 + k / 4k^2 + 2k$ și $k^2 + k / 4k^2 + 4k$, de unde rezultă $k^2 + k / 2k$ și în mod necesar $k=1$. Deci $f(1) = 1$.

Presupunem inductiv că $f(n) = n$ și folosind relația din ipoteză obținem $f(n+1) = n+1$.

În concluzie, singura funcție cu proprietatea dată este $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, $f(n) = n, \forall n \geq 1$.

Barem.

Demonstrează că $f(1) = 1$	4p
Aplică metoda inducției matematice și determină funcția.....	3p

2. Se dă șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, definit prin $a_n = \frac{x^{n+1} + y^{n+1}}{x^n + y^n} + \frac{y^{n+1} + z^{n+1}}{y^n + z^n} + \frac{z^{n+1} + x^{n+1}}{z^n + x^n}$, unde x, y, z sunt numere reale strict pozitive. Demonstrați că: $a_{n+1} + a_{n-1} \leq 2a_n, \forall n \geq 2$.

Ion Bursuc, Suceava

Soluție. Este suficient să arătăm: $\frac{x^{n+2} + y^{n+2}}{x^{n+1} + y^{n+1}} + \frac{x^n + y^n}{x^{n-1} + y^{n-1}} \leq \frac{2(x^{n+1} + y^{n+1})}{x^n + y^n}, \forall n \geq 2. (1)$

Fie $t = \frac{x}{y}$. Inegalitatea de demonstrat devine:

$$\frac{t^{n+2} + 1}{t^{n+1} + 1} + \frac{t^n + 1}{t^{n-1} + 1} \leq \frac{2(t^{n+1} + 1)}{t^n + 1} \Leftrightarrow \frac{t^{n+2} + 1}{t^{n+1} + 1} - \frac{(t^{n+1} + 1)}{t^n + 1} \leq \frac{(t^{n+1} + 1)}{t^n + 1} - \frac{t^n + 1}{t^{n-1} + 1}.$$

Aducând la același numitor și efectuând calculele obținem:

$$\frac{(t-1)^2}{t^n + 1} \left(\frac{t^{n-1}}{t^{n-1} + 1} - \frac{t^n}{t^{n+1} + 1} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{t^{n-1}(t-1)^2}{(t^{n-1} + 1)(t^n + 1)(t^{n+1} + 1)} \cdot (t^{n+1} + 1 - t^n - t) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$\frac{t^{n-1}(t-1)^2}{(t^{n-1} + 1)(t^n + 1)(t^{n+1} + 1)} \cdot (t^n - 1)(t-1) \geq 0$, inegalitate adevărată ținând cont de faptul că expresiile $t^n - 1$ și

$t-1$ au același semn, pentru orice $n \geq 2, t > 0$.

În mod analog obținem inegalitățile:

$$\frac{y^{n+2} + z^{n+2}}{y^{n+1} + z^{n+1}} + \frac{y^n + z^n}{y^{n-1} + z^{n-1}} \leq \frac{2(y^{n+1} + z^{n+1})}{y^n + z^n} \quad (2)$$

$$\frac{x^{n+2} + z^{n+2}}{x^{n+1} + z^{n+1}} + \frac{x^n + z^n}{x^{n-1} + z^{n-1}} \leq \frac{2(x^{n+1} + z^{n+1})}{x^n + z^n} \quad (3)$$

Adunând inegalitățile (1), (2) și (3) obținem inegalitatea din enunț. Egalitatea are loc când numerele x, y, z sunt egale.

Barem.

Demonstrează inegalitatea $\frac{x^{n+2} + y^{n+2}}{x^{n+1} + y^{n+1}} + \frac{x^n + y^n}{x^{n-1} + y^{n-1}} \leq \frac{2(x^{n+1} + y^{n+1})}{x^n + y^n}, \forall n \geq 2$	6p
Finalizare.....	1p

3. Fie ABCD un patrulater și punctele M,N,P,Q astfel încât $\overline{AM} = \overline{MB}$, $\overline{BN} = 3\overline{NC}$, $\overline{DP} = \overline{PC}$, $\overline{DQ} = -\frac{1}{4}\overline{AD}$.

Să se arate că dreapta MP trece prin mijlocul segmentului [NQ].

Soluție. a) Din relațiile vectoriale deducem că punctele M și P sunt mijloacele segmentelor [AB], respectiv [CD], iar $\overline{BN} = \frac{3}{4}\overline{BC}$, $\overline{AQ} = \frac{3}{4}\overline{AD}$.

Considerăm S mijlocul segmentului [NQ] și avem $\overline{MN} + \overline{MQ} = 2\overline{MS}$ (1)

Dar $\overline{MN} + \overline{MQ} = \overline{MB} + \overline{BN} + \overline{MA} + \overline{AQ} = \overline{BN} + \overline{AQ} = \frac{3}{4}(\overline{BC} + \overline{AD})$ (2)

Mai putem scrie: $2\overline{MP} = (\overline{MB} + \overline{BC} + \overline{CP}) + (\overline{MA} + \overline{AD} + \overline{DP}) = \overline{BC} + \overline{AD}$ (3)

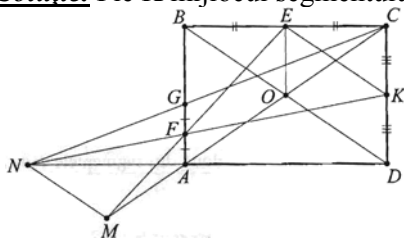
Din relațiile (1), (2) și (3) deducem $\overline{MS} \parallel \overline{MP}$, deci punctul S aparține segmentului [MP].

Barem.

a) Figura	1p
$\overline{MN} + \overline{MQ} = 2\overline{MS}$	1p
Deduce relația (2).....	2p
Deduce relația (3).....	2p
Finalizare.....	1p

4. În dreptunghiul ABCD punctul E este mijlocul laturii BC, iar punctele diferite F și G aparțin segmentului [AB], astfel că AF=FG. Dreptele EF și CG intersectează dreptele AC, respectiv AD în punctele M și respectiv N. Să se demonstreze că dreptele MN și BD sunt paralele.

Soluție. Fie K mijlocul segmentului [CD] și O centrul dreptunghiului.



Din $\triangle NAG \sim \triangle NDC$ rezultă $\frac{AG}{DC} = \frac{NA}{ND} \Leftrightarrow \frac{AF}{DK} = \frac{NA}{ND}$. Deducem că

$\triangle NAF \sim \triangle NDK$ și atunci punctele N, F, K sunt coliniare și

$$\frac{NF}{NK} = \frac{AG}{CD} \quad (1).$$

$$OE \parallel AB \Rightarrow \triangle MFA \sim \triangle MEO \Rightarrow \frac{MF}{ME} = \frac{AF}{OE} \Rightarrow \frac{MF}{ME} = \frac{AG}{CD} \quad (2).$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă $\frac{NF}{NK} = \frac{MF}{ME} \Leftrightarrow \frac{NF}{FK} = \frac{MF}{FE}$, de unde $\triangle MFN \sim \triangle EFK$, deci $KE \parallel MN$ (3)

Cum [KE] este linie mijlocie în triunghiul CDB avem $KE \parallel BD$ (4)

Din relațiile (3) și (4) obținem concluzia.

Barem.

Demonstrează că punctele N, F, K sunt coliniare	2p
$\frac{NF}{NK} = \frac{AG}{CD}$ (1)	1p
Determină relația (2).....	1p
Demonstrează $KE \parallel MN$	2p
Finalizare	1p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.