INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN GALAŢI
Str.Portului Nr.55 B ☎ **0372362000; 0372362001** 🖷 **023631939**
E-mail: info@isj.gl.edu.ro; Adresă site: www.isj.gl.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

28 februarie 2016

Clasa a VI-a

Problema 1.

a) Să se determine numerele prime a, b, c pentru care $15\cdot a + 35\cdot b + 91\cdot c = 2015$.

b) Câte numere prime de trei cifre se transformă în cuburi perfecte dacă schimbăm ordinea cifrelor lor?

Problema 2.

Fie punctele A, O, B coliniare în această ordine, iar de aceeaşi parte a dreptei AB se consideră semidreptele $[OE$ şi $[OF$, $OE \perp OF$, astfel ca $m(\measuredangle AOE) < m(\measuredangle AOF)$. Dacă $[OX$ este bisectoarea unghiului $\measuredangle FOB$, iar măsura unghiului $\measuredangle AOE$ este cu $15°$ mai mică decât măsura complementului unghiului $\measuredangle XOB$, să se calculeze măsura unghiului $\measuredangle EOX$.

Problema 3.

Să se determine toate numerele naturale $\overline{abc}$, $a \neq 0$, care sunt divizibile cu $17\cdot a + 2\cdot b + 2\cdot c$.

Problema 4.

Se dă şirul de fracţii $\frac{4}{15}, \frac{5}{17}, \frac{6}{19}, \ldots,$ în care numărătorii sunt numere naturale consecutive, iar numitorii sunt numere naturale impare consecutive.

a) Să se scrie primele 2 fracţii reductibile din acest şir.

b) Să se calculeze câte fracţii reductibile sunt în primele 2016 fracţii din acest şir.

Notă: Toate problemele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru 2 ore.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

28 februarie 2016

Clasa a VI-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1	a) Fiecare din numerele $15\cdot a$; $35\cdot b$; 2015 se divide cu $5 \Rightarrow (91\cdot c)⋮5 \Rightarrow c=5$ (număr prim). Egalitatea devine: $15\cdot a + 35\cdot b + 455=2015 \Rightarrow 15\cdot a + 35\cdot b = 1560 \Rightarrow 3\cdot a + 7\cdot b = 312 \Rightarrow (7\cdot b)⋮3 \Rightarrow b=3$; Înlocuind pe b=3 în egalitatea $3\cdot a + 7\cdot b = 312 \Rightarrow 3\cdot a = 291 \Rightarrow a = 97$. Aşadar, a=97; b=3; c=5	1p 1p 1p
	b) Numerele de trei cifre, cuburi perfecte, sunt: $5^3=125$, $6^3=216$, $7^3=343$, $8^3=512$, $9^3=729$. Le analizăm pe rând şi vedem care permutare a cifrelor formează numere prime. 1) $5^3=125 \Rightarrow$ numerele prime sunt: 521 si 251 (celelalte variante sunt numere compuse); 2) $6^3=216 \Rightarrow$ nici un număr prim (suma cifrelor se divide cu3); 3) $7^3=343 \Rightarrow$ 433 este număr prim; 4) $8^3=512 \Rightarrow$ numerele prime sunt:521, 251 (soluţie de la punctul 1); 5) $9^3=729 \Rightarrow$ nici un număr prim (suma cifrelor se divide cu3). Aşadar, există trei numere prime: 521, 251, 433.	1p 1p 1p 1p
2	Fie $m(\measuredangle FOX) = m(\measuredangle BOX) = a$; $m(\measuredangle FOE) = 90°$, $m(\measuredangle AOE) = 90° - 2\cdot a$	3p
	Condiţia din ipoteză se scrie: $90° - 2\cdot a + 15 = 90° - a \Rightarrow a = 15°$	3p
	Aşadar, $m(\measuredangle AOE) = 60°$, $m(\measuredangle XOE) = 105°$	1p
	$\overline{abc} = n\cdot(17\cdot a + 2\cdot b + 2\cdot c)$, $n \in \mathbb{N}^*$	1p
	Observăm că $n \le 5$ deoarece pentru $n \ge 6$, membrul drept este mai mare decât cel stâng;	1p

<table>
<tr><td rowspan="1">3</td><td>1) n=5 $\Rightarrow 100\cdot$a+10$\cdot$b+c=85$\cdot$a+10$\cdot$b+10$\cdot$c $\Rightarrow 15\cdot$a=9$\cdot$c $\Rightarrow$ a=3, c=5 $\Rightarrow$
numerele: 305, 315, 325, ..., 395
2) n=4 $\Rightarrow 100\cdot$a+10$\cdot$b+c=68$\cdot$a+8$\cdot$b+8c $\Rightarrow 32\cdot$a+2$\cdot$b=7$\cdot$c $\Rightarrow$ c$\vdots$2 $\Rightarrow 7\cdot c\ge 32 \Rightarrow c\in\{6,8\}$;
Dacă $c=6\Rightarrow a=1,\ b=5\Rightarrow 156$
Dacă $c=8\Rightarrow a=1,\ b=12-$ nu convine
3) n=3 $\Rightarrow 100\cdot$a+10$\cdot$b+c=51$\cdot$a+6$\cdot$b+6$\cdot$c $\Rightarrow 49\cdot$a+4$\cdot$b=5$\cdot$c $\Rightarrow$ imposibil;
4) $n\in\{1,2\}\Rightarrow$ nu se obţin soluţii, membrul stâng este prea mare.
Numerele căutate sunt: 305, 315, 325, ..., 395,156.</td><td>3p

1p

1p</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td>a) $\frac{7}{21}$;
$\frac{14}{35}$</td><td>2p

1p</td></tr>
<tr><td>Toate fracţiile din şir sunt de forma $\frac{n+4}{2\cdot n+15}$, $n\in\mathbb{N}$.
Dacă o fracţie este reductibilă, atunci există $d\in\mathbb{N}^*$, d>1, astfel ca
$\begin{cases}(n+4)\vdots d\\(2\cdot n+15)\vdots d\end{cases}\Rightarrow 7\vdots d\Rightarrow d=7$; $\big($O fracţie din şir este reductibilă eventual prin 7$\big)$.
Pentru a fi reductibilă prin 7, trebuie ca $(n+4)\vdots 7\Rightarrow n=7\cdot k-4,\ k\in\mathbb{N}^*$.
Pentru $n=\overline{0,2015}$, obţinem numerele 3, 10, 17, ..., 2012 de forma $7\cdot k-4$,
adică exact 288 fracţii sunt reductibile din primele 2016 fracţii din şir.</td><td>1p

1p

1p
1p</td></tr>
</table>