OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
30 ianuarie 2016

CLASA A VIII-A

1.) Decideţi dacă sunt adevărate următoarele propoziţii:

(P_1): $\left(\sqrt{14}-\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{5+\sqrt{21}}$ este număr natural.

(P_2): $5^{27} \in \left(2^{63};\infty\right)$

(P_3): $(-1)^n + (-1)^{m+n} + (-1)^m + (-1)^{m\cdot n}$ se divide cu 4 pentru orice $m,n \in \mathbb{N}$, unde n este număr par.

2.) Calculaţi valoarea expresiei $\dfrac{a^8+a^7+a^6+a^5+a^4+a^3+a^2+a+1}{a^4}$, dacă $a+\dfrac{1}{a}=5$.

3.) Fie $ABCD$ un romb, astfel încât $AB \subset \alpha$ şi măsura unghiului dintre planul rombului şi planul α este de 45°. Calculaţi sinusul unghiurilor dintre diagonalele rombului şi planul α, ştiind că diagonalele rombului sunt de 6 cm şi de 8 cm.

4.) Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = AA' = 2a$ şi $BC = a$. Fie M, N, P mijloacele muchiilor AB, DD' respectiv $D'C'$.

a) Aflaţi măsura unghiului dintre dreptele AN şi MC.

b) Calculaţi distanţa de la punctul P la planul $(DD'B')$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

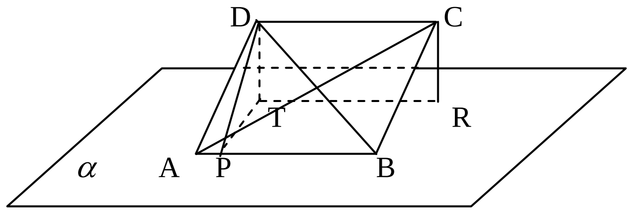
Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

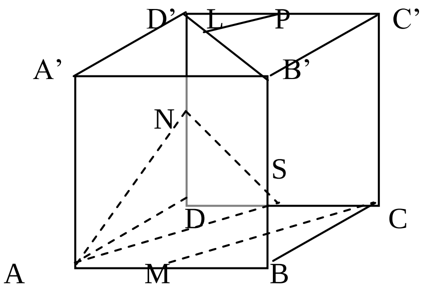
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
30 ianuarie 2016
BAREM
CLASA A VIII-A

1.)	**Din oficiu**	**1p**
	$\sqrt{5+\sqrt{21}}=\sqrt{\frac{\sqrt{3}^2+\sqrt{7}^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}{2}}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2}{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ $\left(\sqrt{14}-\sqrt{6}\right)=\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)$ $\left(\sqrt{14}-\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{5+\sqrt{21}}=\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{7}^2-\sqrt{3}^2\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=7-3=4\in\mathbb{N}$ .Deci, prima propoziţie este adevărată.	**3p**
	$\left.\begin{array}{l}2^{63}=\left(2^7\right)^9=128^9\\ 5^{27}=\left(5^3\right)^9=125^9\end{array}\right\}\Rightarrow 5^{27}<2^{63}\Rightarrow 5^{27}\notin\left(2^{63};\ \infty\right)$ Aşadar, a doua propoziţie nu este adevărată.	**3p**
	n este număr par. Dacă m este par atunci, atunci $m+n$ este par şi $m\cdot n$ este par, deci $\left(-1\right)^n+\left(-1\right)^{m+n}+\left(-1\right)^m+\left(-1\right)^{m\cdot n}=1+1+1+1=4$, ceea ce se divide cu 4. Dacă m este impar atunci $m+n$ este impar şi $m\cdot n$ este par, deci $\left(-1\right)^n+\left(-1\right)^{m+n}+\left(-1\right)^m+\left(-1\right)^{m\cdot n}=1-1-1+1=0$, ceea ce se divide cu 4. Deci, a treia propoziţie este adevărată.	**3p**

2.)	**Din oficiu**	**1p**
	$\frac{a^8+a^7+a^6+a^5+a^4+a^3+a^2+a+1}{a^4}=a^4+a^3+a^2+a+1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}=$ $=\left(a^4+\frac{1}{a^4}\right)+\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)+\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)+\left(a+\frac{1}{a}\right)+1$	**2p**
	$a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2\cdot a\cdot\frac{1}{a}=25-2=23$	**2p**
	$a^4+\frac{1}{a^4}=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2-2\cdot a^2\cdot\frac{1}{a^2}=529-2=527$	**2p**
	Cum $\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)=a^3+\frac{1}{a^3}+a+\frac{1}{a}$, rezultă că $a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)-\left(a+\frac{1}{a}\right)=23\cdot 5-5=110$	**2p**
	$\left(a^4+\frac{1}{a^4}\right)+\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)+\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)+\left(a+\frac{1}{a}\right)+1=527+110+23+5+1=666$	**1p**

3.)	**Din oficiu**	**1p**
	Desen 	**1p**
	Fie $DT\perp\alpha, T\in\alpha$ şi $TP\perp AB, P\in AB$. $DT\perp\alpha, T\in\alpha$, $AB\subset\alpha$, $TP\perp AB, P\in AB\overset{T.3p.}{\Rightarrow}DP\perp AB$	**2p**

	$(ABC)\cap\alpha=AB, DP\perp AB,\ TP\perp AB,\ DP\subset(ABC),\ TP\subset\alpha\Rightarrow$ $\Rightarrow m(\widehat{(ABC),\alpha})=m(\widehat{DP;TP})=m(\widehat{DPT})$, deci $m(\widehat{DPT})=45^\circ$	
	Fie $AC\cap DB=\{O\}$, $ABCD$ este romb $\Rightarrow DB\perp AC$, $DO=OB, AO=OC$ $AC=8\,\text{cm}, DB=6\,\text{cm}$ $m(\widehat{DOA})=90^\circ \overset{T.Pit.}{\Rightarrow} AD^2=DO^2+AO^2\Rightarrow AD=\sqrt{3^2+4^2}=5\ (\text{cm})$ $A_{[ABCD]}=\dfrac{DB\cdot AC}{2}=AB\cdot DP\Rightarrow DP=\dfrac{DB\cdot AC}{2AB}=4{,}8\,\text{cm}$ În $\Delta DPT, \sin(\widehat{DPT})=\dfrac{DT}{DP}\Rightarrow DT=4{,}8\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2{,}4\sqrt{2}\ (\text{cm})$	**2p**
	$DT\perp\alpha, T\in\alpha$, $B\in\alpha\Rightarrow m(\widehat{DB;\alpha})=m(\widehat{DB;TB})=m(\widehat{DBT})$ În $\Delta DBT, \sin(\widehat{DBT})=\dfrac{DT}{DB}=\dfrac{2{,}4\sqrt{2}}{6}=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$.	**2p**
	$CR\perp\alpha, R\in\alpha, A\in\alpha\Rightarrow m(\widehat{AC;\alpha})=m(\widehat{AC;AR})=m(\widehat{CAR})$ $DC\parallel AB, AB\subset\alpha, DC\not\subset\alpha\Rightarrow DC\parallel\alpha$ şi cum $DT\perp\alpha,\ T\in\alpha, CR\perp\alpha, R\in\alpha$, rezultă că $DT=CR$. În $\Delta CAR, \sin(\widehat{CAR})=\dfrac{CR}{AC}=\dfrac{2{,}4\sqrt{2}}{8}=\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$.	**2p**

4.)	**Din oficiu**	**1p**
	Desen 	**1p**
	a) Fie $AS\parallel MC$, $S\in DC$, atunci $m(\widehat{AN,MC})=m(\widehat{AN,AS})=m(\widehat{NAS})$ $AS\parallel MC, SC\parallel AM\Rightarrow AMCS$ este paralelogram $\Rightarrow SC=AM=a$, şi astfel $DS=2a-a=a$. În ΔADS avem: $DS=AD=a$, $m(\widehat{ADS})=90^\circ\Rightarrow AS=a\sqrt{2}$ În ΔNDS avem: $DS=ND=a$, $m(\widehat{NDS})=90^\circ\Rightarrow NS=a\sqrt{2}$ În ΔNDA avem: $ND=AD=a$, $m(\widehat{NDA})=90^\circ\Rightarrow NA=a\sqrt{2}$ În ΔNSA $AN=NS=AS\Rightarrow m(\widehat{NAS})=60^\circ$, deci $m(\widehat{AN,MC})=60^\circ$.	**3p**
	b) Fie $PL\perp D'B', L\in D'B'$. $DD'\perp D'P, DD'\perp D'A', D'P\cap D'A'=\{D'\}, D'P, D'A'\subset(A'D'P)\Rightarrow DD'\perp(A'D'P)$ $DD'\perp(A'D'P), PL\subset(A'D'P)\Rightarrow DD'\perp PL$ $PL\perp D'B', PL\perp D'D, DD', D'B'\subset(D'DB), DD'\cap D'B'=\{D'\}\Rightarrow PL\perp(DD'B')$. Deci $d(P,(DD'B'))=PL$. $\widehat{PLD'}\equiv\widehat{B'C'D'}, \widehat{PD'L}\equiv\widehat{B'D'C'}\Rightarrow\Delta PLD'\sim\Delta B'C'D'\Rightarrow\dfrac{PL}{B'C'}=\dfrac{PD'}{B'D'}$ În $\Delta D'C'B'$ $m(\widehat{C'})=90^\circ\Rightarrow D'B'^2=D'C'^2+C'B'^2\Rightarrow D'B'=\sqrt{4a^2+a^a}=a\sqrt{5}$ Atunci $PL=\dfrac{B'C'\cdot PD'}{B'D'}=\dfrac{a\cdot a}{a\sqrt{5}}=\dfrac{a}{\sqrt{5}}=\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$, deci $d(P,(DD'B'))=\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.	**5p**