Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Iași, 16 aprilie 2022

CLASA a VII-a

Problema 1. Determinați numerele naturale nenule n cu proprietatea că numărul 6^n se poate scrie ca suma cuburilor a trei numere naturale consecutive.

Problema 2. Pe laturile AB și AC ale triunghiului ascuțitunghic ABC se construiesc, în exteriorul acestuia, triunghiurile ABP și ACQ cu $\sphericalangle P = \sphericalangle Q = 90°$ și $\sphericalangle BAP \equiv \sphericalangle CAQ$. Notăm cu M mijlocul laturii BC și cu N piciorul înălțimii din A a triunghiului ABC.

Demonstrați că punctele M, N, P și Q sunt conciclice.

Problema 3. Pe latura BC a paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele E și F. Notăm cu G și H punctele în care dreapta CD intersectează dreptele AE, respectiv AF, și cu I punctul de intersecție a dreptelor EH și FG.

Demonstrați că dreptele BD și CI sunt paralele.

Problema 4. Numim *mulțime interesantă* o mulțime de 2022 de numere reale strict pozitive cu proprietatea că, atunci când scriem elementele sale în ordine crescătoare, nu există niciun element care să fie egal cu media aritmetică a vecinilor săi.

Oricărei mulțimi A îi atașăm mulțimea

$$\widetilde{A} = \{x + y \mid x, y \in A\}.$$

a) Determinați cardinalul maxim posibil al unei mulțimi $\widetilde{A}$ atunci când A parcurge toate mulțimile interesante.

b) Determinați cardinalul minim posibil al unei mulțimi $\widetilde{A}$ atunci când A parcurge toate mulțimile interesante.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Ministerul Educației

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Iași, 16 aprilie 2022

CLASA a VII-a – soluții și bareme

Problema 1. *Determinați numerele naturale nenule n cu proprietatea că numărul 6^n se poate scrie ca suma cuburilor a trei numere naturale consecutive.*

Soluție. Observăm că $n = 1$ nu convine, dar $n = 2$ și $n = 3$ au proprietatea dorită, deoarece $6^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$, iar $6^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3$. **2p**

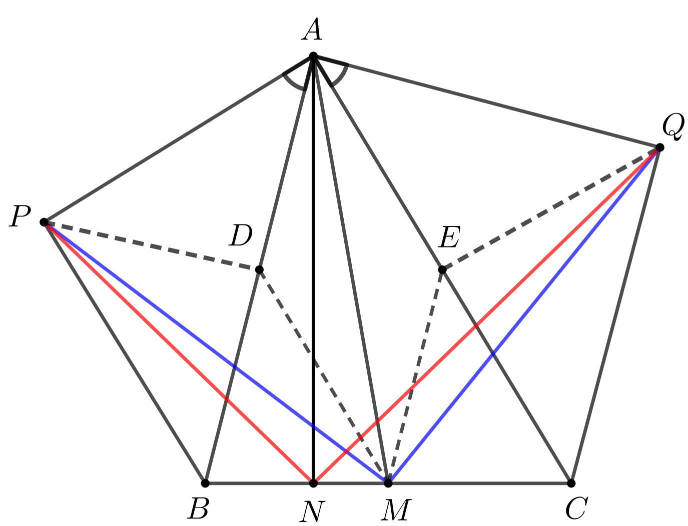
Vom arăta că acestea sunt singurele valori convenabile ale lui n. Presupunem, prin absurd, că există $n \geqslant 4$ și $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $6^n = (m-1)^3 + m^3 + (m+1)^3$. Cum 6^n este număr par, rezultă că m trebuie să fie par, prin urmare $m = 2k$, unde $k \in \mathbb{N}^*$. După calcule obținem că $6^n = 12k\left(2k^2 + 1\right)$. **1p**

Atunci $2^{n-2} \cdot 3^{n-1} = k\left(2k^2 + 1\right)$. Cum numerele k și $2k^2 + 1$ sunt prime între ele, al doilea fiind impar, rezultă că $2^{n-2} = k$ și $3^{n-1} = 2k^2 + 1$. **2p**

Obținem $3^{n-1} = 2^{2n-3} + 1$. Însă $2^{2n-3} + 1 > 2^{2n-3} = 32 \cdot 4^{n-4} > 27 \cdot 3^{n-4} = 3^{n-1}$ și ajungem la o contradicție. **2p**

Problema 2. *Pe laturile AB și AC ale triunghiului ascuțitunghic ABC se construiesc, în exteriorul acestuia, triunghiurile ABP și ACQ cu $\sphericalangle P = \sphericalangle Q = 90^\circ$ și $\sphericalangle BAP \equiv \sphericalangle CAQ$. Notăm cu M mijlocul laturii BC și cu N piciorul înălțimii din A a triunghiului ABC.*

Demonstrați că punctele M, N, P și Q sunt conciclice.



Soluție. Notăm cu a măsura unghiului A și fie $x = \widehat{BAP} = \widehat{CAQ}$.

Cum $\widehat{APB} = \widehat{ANB} = 90^\circ$, punctele A, P, B și N sunt conciclice. Atunci $\widehat{PNA} = \widehat{PBA} = 90^\circ - x$. Analog se arată că $\widehat{QNA} = \widehat{QCA} = 90^\circ - x$, prin urmare $\widehat{PNQ} = 180^\circ - 2x$. **2p**

Fie D și E mijloacele laturilor AB, respectiv AC. Patrulaterul $ADME$ este un paralelogram, așadar $\widehat{DME} = \widehat{A} = a$. PD este mediana corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul dreptunghic PAB, deci $PD = DA$. Deducem că $\widehat{PDA} = 180^\circ - 2x$. Analog, $\widehat{AEQ} = 180^\circ - 2x$. **1p**

În cazul în care punctele M, D și P sunt coliniare, avem că $\widehat{PDA} \equiv \widehat{A}$, de unde $a + 2x = 180^\circ$. Rezultă că punctele M, E, Q sunt, și ele, coliniare. Astfel, $\widehat{PMQ} = \widehat{DME} = a = 180^\circ - 2x = \widehat{PNQ}$, așadar punctele M, N, P și Q sunt conciclice. **1p**

Dacă punctele M, D și P sunt necoliniare, atunci $a + 2x \neq 180^\circ$, iar punctele M, E, Q sunt, și ele, necoliniare. În cele ce urmează, presupunem că $a + 2x < 180^\circ$, cealaltă situație tratându-se similar.

Cum $PD = \dfrac{1}{2}AB = ME$, $DM = \dfrac{1}{2}AC = QE$ și $\widehat{PDM} = \widehat{MEQ} = a + 2x$, triunghiurile PDM și MEQ sunt congruente și, de aici, $\widehat{PMD} \equiv \widehat{MQE}$.

Rezultă că $\widehat{PMQ} = \widehat{PMD} + \widehat{DME} + \widehat{EMQ} = \widehat{MQE} + a + \widehat{EMQ} = a + 180^\circ - \widehat{MEQ} = a + 180^\circ - (a + 2x) = 180^\circ - 2x = \widehat{PNQ}$, deci punctele M, N, P și Q sunt conciclice. **3p**

Problema 3. *Pe latura BC a paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele E și F. Notăm cu G și H punctele în care dreapta CD intersectează dreptele AE, respectiv AF, și cu I punctul de intersecție a dreptelor EH și FG.*

Demonstrați că dreptele BD și CI sunt paralele.

Soluție. Notăm cu a și b lungimile laturilor AB, respectiv AD, iar x și y vor fi lungimile segmentelor CG, respectiv CH. Presupunem, fără a restrânge generalitatea, că $x < y$.

Din asemănarea triunghiurilor ECG și EBA obținem că $\dfrac{EC}{EB} = \dfrac{x}{a}$, deci $EC = \dfrac{bx}{a+x}$. Analog, din asemănarea triunghiurilor FCH și FBA deducem că $CF = \dfrac{by}{a+y}$, iar $BF = \dfrac{ab}{a+y}$. Atunci $EF = CF - CE = \dfrac{ab\,(y-x)}{(a+x)\,(a+y)}$. **2p**

Fie J punctul de intersecție a dreptelor AF și CI. Folosind teorema lui Ceva în triunghiul CFH și ținând seama de rezultatele de mai înainte, obținem că $\dfrac{FJ}{JH} = \dfrac{a}{a+y}$. Însă din asemănarea triunghiurilor ABF și HCF deducem că $FH = \dfrac{y}{a}AF$, prin urmare $FJ = \dfrac{y}{2a+y}AF$, iar $JH = \dfrac{y\,(a+y)}{a\,(2a+y)}AF$. **3p**

Fie K punctul de intersecție a dreptelor AF și BD. Din asemănarea triunghiurilor ADK și BFK obținem $KF = \dfrac{a}{2a+y}AF$, deci $KJ = KF + FJ = \dfrac{a+y}{2a+y}AF$. **1p**

Atunci $\dfrac{HJ}{JK} = \dfrac{y}{a} = \dfrac{HC}{CD}$. Folosind reciproca teoremei lui Thales în triunghiul HKD urmează concluzia problemei. **1p**

Problema 4. *Numim* mulțime interesantă *o mulțime de 2022 de numere reale strict pozitive cu proprietatea că, atunci când scriem elementele sale în ordine crescătoare, nu există niciun element care să fie egal cu media aritmetică a vecinilor săi.*

Oricărei mulțimi A îi atașăm mulțimea $\widetilde{A} = \{x + y \mid x, y \in A\}$.

a) Determinați cardinalul maxim posibil al unei mulțimi $\widetilde{A}$ atunci când A parcurge toate mulțimile interesante.

b) Determinați cardinalul minim posibil al unei mulțimi $\widetilde{A}$ atunci când A parcurge toate mulțimile interesante.

Soluție. a) Cardinalul maxim al unei mulțimi $\widetilde{A}$ se obține atunci când toate sumele $x + y$, unde $x, y \in A$, sunt distincte. În acest caz, $\left|\widetilde{A}\right| = \dfrac{2022 \cdot 2023}{2}$. **1p**

Acest maxim se atinge, de exemplu, pentru mulțimea interesantă

$$A = \left\{1, 3, 3^2, \ldots, 3^{2021}\right\}.$$

.... **1p**

b) Fie $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2022}$ elementele unei mulțimi interesante A.

Atunci sumele $a_1 + a_2$, $a_2 + a_2$ și $a_1 + a_3$ sunt distincte; notăm cu A_1 mulțimea formată din aceste trei numere. Analog, sumele $a_2 + a_3$, $a_3 + a_3$ și $a_2 + a_4$ sunt distincte; notăm cu A_2 mulțimea formată din aceste numere. Observăm că A_1 și A_2 sunt disjuncte, deoarece $a_2 + a_3$, cel mai mic element al lui A_2, este mai mare decât orice element al lui A_1.

În aceeași manieră definim mulțimile $A_3, A_4, \ldots, A_{2020}$, disjuncte două câte două. Atunci

$$\{a_1 + a_1\} \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{2020} \cup \{a_{2021} + a_{2022}, a_{2022} + a_{2022}\} \subset \widetilde{A}.$$

Rezultă că $\left|\widetilde{A}\right| \geqslant 1 + 3 \cdot 2020 + 2 = 6063$. **3p**

Acest minim se atinge, de exemplu, pentru mulțimea interesantă

$$A = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, \ldots, 3031, 3032\}.$$

Mulțimea atașată este $\widetilde{A} = \{2, 3, 4, 5, \ldots, 6064\}$, de cardinal 6063. .... **2p**