INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN GORJ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ , CLASA a VI - a

22 FEBRUARIE 2014

SUBIECTUL I

a) Demonstrați că $\frac{n}{k(k+n)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+n}$, pentru orice k și n numere naturale.

b) Determinați numărul natural nenul *n* pentru care

$$\frac{1}{56\cdot57}+\frac{2}{57\cdot59}+\frac{3}{59\cdot62}+\cdots+\frac{62}{n(n+62)}=\frac{2015}{115976}$$

Supliment Gazeta Matematică /2013

SUBIECTUL II

a) Aflați numărul divizorilor naturali ai numărului 15^{51} care sunt multiplii pentru numărul 225^{20} .

b) Arătați că numărul $A=\frac{21^n+23^n-2^{2n}+2^{n+1}\cdot3^2}{38}$ este număr natural pentru orice *n* număr natural nenul .

Supliment Gazeta Matematică 3/2013

SUBIECTUL III

Fie punctul O mijlocul unui segment de dreaptă [AB] . Pe semidreapta (OA se consideră un punct E astfel încât $BE=5\cdot AE$. Aflați lungimea segmentului AB știind că EO = 6 cm.

SUBIECTUL IV

Se consideră trei puncte A , B , C astfel încât $B\in(AC)$. Fie D și E de o parte și de alta a dreptei AC și (BM , (BN bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle DBC$ și respectiv $\sphericalangle ABE$. Știind că semidreptele (BM și (BN sunt opuse , demonstrați că punctele D , B , E sunt coliniare.

Barem de corectare CLS VI

SUBIECTUL I

a) Demonstrați că $\frac{n}{k(k+n)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+n}$, pentru orice k și n numere naturale.

b) Determinați numărul natural nenul *n* pentru care

$$\frac{1}{56 \cdot 57} + \frac{2}{57 \cdot 59} + \frac{3}{59 \cdot 62} + \cdots + \frac{62}{n(n+62)} = \frac{2015}{115976}$$

SOLUȚIE	PUNCTAJ
$\frac{n}{k(k+n)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+n}$	2p
$\frac{1}{56 \cdot 57} + \frac{2}{57 \cdot 59} + \frac{3}{59 \cdot 62} + \cdots + \frac{62}{n(n+62)} = \frac{1}{56} - \frac{1}{57} + \frac{1}{57} - \frac{1}{59} + \frac{1}{59} - \frac{1}{62} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+62} =$ $\frac{1}{56} - \frac{1}{n+62} = \frac{n+62-56}{56(n+62)} = \frac{n+6}{56(n+62)}$	2p 1p
$\frac{n+6}{56(n+62)} = \frac{2015}{115975} \Leftrightarrow \frac{n+6}{n+62} = \frac{112840}{115975} \Leftrightarrow \frac{n+6}{n+62} = \frac{2015}{2071} \Leftrightarrow n = 2009$	2p

SUBIECTUL II

a) Aflați numărul divizorilor naturali ai numărului 15^{51} care sunt multiplii pentru numărul 225^{20} .

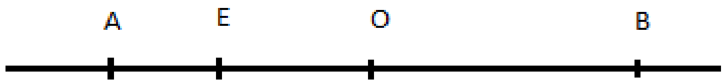
b) Arătați că numărul $A = \frac{21^n + 23^n - 2^{2n} + 2^{n+1} \cdot 3^2}{38}$ este număr natural pentru orice *n* număr natural nenul .

SOLUȚIE	PUNCTAJ
$225^{20} = 15^{40}$ $15^{51} : 225^{20} = 15^{11} = 3^{11} \cdot 5^{11}$ Multiplii lui $15^{40} \cdot$, divizori ai lui 15^{51} sunt de forma „$15^{40} \cdot$ divizori ai lui 15^{11}”, in numar de $(11+1) \cdot (11+1) = 144$	1p 1p 1p
a) $(21)^n = (19+2)^n = M_{19} + 2^n$, $(23)^n = (19+4)^n = M_{19} + 4^n$	1p
$2^{2n} = (2^2)^n = 4^n$, $2^{n+1} \cdot 3^2 = 2^n \cdot 2 \cdot 9 = 2^n \cdot 18 = (19-1) \cdot 2^n = M_{19} \cdot 2^n -$	1p

2^n	
$A = \frac{M_{19} + 2^n + M_{19} + 4^n - 4^n + M_{19} \cdot 2^n - 2^n}{38} = \frac{2 \cdot M_{19} + 2^n \cdot M_{19}}{38} = \frac{M_{38}}{38} \in N$	2p

SUBIECTUL III

Fie punctul O mijlocul unui segment de dreaptă [AB] . Pe semidreapta (OA se consideră un punct E astfel încât $BE = 5 \cdot AE$. Aflați lungimea segmentului AB știind că EO = 6 cm.



Problema are două cazuri : **1p**

CAZUL I : $E \in (OA)$

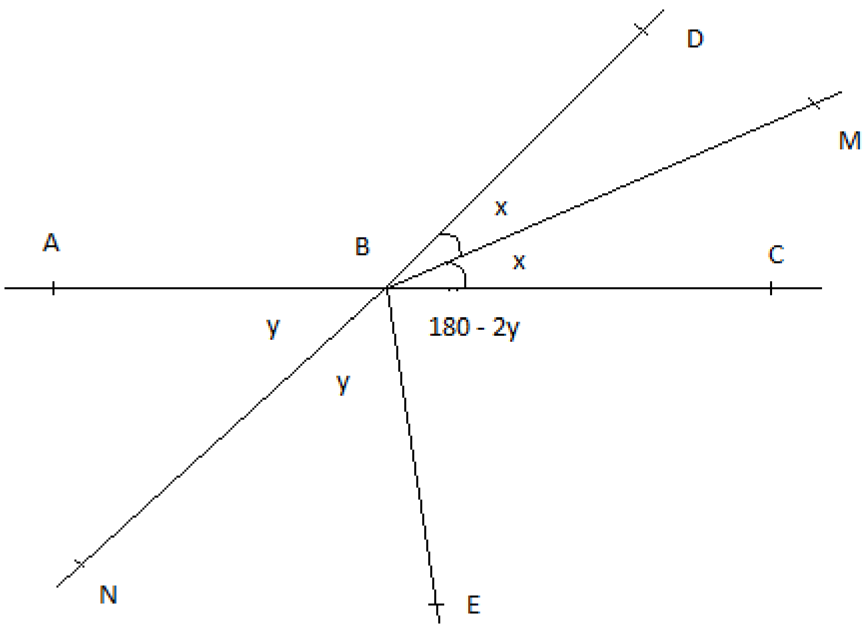
SOLUTIE	PUNCTAJ
Din $BE = 5 \cdot AE$ și $AB = AE + BE$ se deduce $AB = 6 \cdot AE$.	1p
Cum punctul O este mijlocul segmentului $[AB]$ rezultă $OA = 3 \cdot AE$	1p
$\Rightarrow AE = EO : 2 = 3\ cm \Rightarrow AB = 18\ cm.$	1p

CAZUL II : $E \in (OA - [OA]$

SOLUȚIE	PUNCTAJ
Din $BE = 5 \cdot AE$ și $AB = BE - AE \Rightarrow AB = 4 \cdot AE$.	1p
Cum punctul O este mijlocul segmentului $[AB] \Rightarrow OA = 2 \cdot AE$	1p
$AE = EO : 3 = 2\ cm \Rightarrow AB = 8\ cm$	1p

SUBIECTUL IV

Se consideră trei puncte A , B , C astfel încât $B \in (AC)$. Fie D și E de o parte și de alta a dreptei AC și (BM , (BN bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle DBC$ și respectiv $\sphericalangle ABE$. Știind că semidreptele (BM și (BN sunt opuse , demonstrați că punctele D , B , E sunt coliniare.



SOLUȚIE	PUNCTAJ
(BM bisectoarea $\sphericalangle DBC \implies m(\sphericalangle DBM) = m(\sphericalangle MBC) = x^0$ (BN bisectoarea $\sphericalangle ABE \implies m(\sphericalangle ABN) = m(\sphericalangle NBE) = y^0$ Punctele A , B , C coliniare rezultă că $m(\sphericalangle ABC) = 180^0 \implies m(\sphericalangle CEB) = 180^0 - 2 \cdot m(\sphericalangle ABN) = 180^0 - 2y^0$ (BM și (BN semidrepte opuse deci , $m(\sphericalangle MBN) = 180^0 \Leftrightarrow m(\sphericalangle MBC) + m(\sphericalangle CBE\ ) + m(\sphericalangle EBN) = 180^0$. $180^0 + x + y = 180^0 + 2y \implies x = y$ $m(\sphericalangle DBE) = m(\sphericalangle DBM) + m(\sphericalangle MBC) + m(\sphericalangle CBE) = y + y + 180^0 - 2y = 180^0$ Finalizare , punctele D , B , E coliniare.	1p 1p 1p 2p 1p 1p