**Inspectoratul Şcolar Judeţean**
**Harghita**

**Olimpiada de matematică – clasa a XI-a**
**etapa zonală – 27 februarie 2016**

**1.** Definim șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $x_1 = 1 - \frac{1}{x}$ și $x_{n+1} = 1 - \frac{1}{x_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Să se determine valoarea lui $x$ pentru care $x_{2014} + x_{2015} + x_{2016} = \frac{3}{2}$.

**2.** Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A + B = I_n$ şi $A^2 = A^3$. Să se demonstreze că $\det(I_n + AB) \neq 0$.

**3.** Considerăm șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin $a^2_{n+1} = a_{n-1} \cdot a_n$, $\forall n \geq 1$, $a_0 = 1$ și $a_1 = 9$. Calculați limita $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

.

**4.** Întindem pe masă un pachet de cărți și le amestecăm după o anumită regulă. Apoi amestecăm iar aplicând aceeași regulă (i. e. dacă la prima amestecare cartea de pe poziția $i$ a ajuns pe poziția $j$, atunci la următoarea amestecare moua carte de pe poziția $i$ ajunge pe poziția $j$). Arătați că dacă amestecăm aplicând de ori de câte ori aceeași regulă, la un anumit număr de pași, obținem ordinea inițială.

**Inspectoratul Şcolar Judeţean**
**Harghita**

## Olimpiada de matematică – clasa a XI-a
## etapa zonală – 27 februarie 2016
## Soluţii şi bareme

**1.** Definim şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $x_1 = 1 - \frac{1}{x}$ şi $x_{n+1} = 1 - \frac{1}{x_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Să se determine valoarea lui $x$ pentru care $x_{2014} + x_{2015} + x_{2016} = \frac{3}{2}$.

**Soluţie.** Avem $x_2 = \frac{1}{1-x}, x_3 = x, x_4 = 1 - \frac{1}{x} = x_1$ ........................................................ **1p**

Prin inducţie matematică avem $x_{3k+1} = x_1,\ x_{3k+2} = x_2,\ x_{3k} = x_3$, $\forall k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_{2014} = x_1,\ x_{2015} = x_2,\ x_{2016} = x_3$ ........................................................ **3p**

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} + x = \frac{3}{2} \Rightarrow 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow$

$(x+1)(2x^2 - 5x + 2) = 0$ ........................................................ **2p**

$\Rightarrow x \in \left\{-1, \frac{1}{2}, 2\right\}$ ........................................................ **1p**

**2.** Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A + B = I_n$ şi $A^2 = A^3$. Să se demonstreze că $\det(I_n + AB) \neq 0$.

**Soluţie.** $B = I_n - A \Rightarrow AB = A - A^2 = BA \Rightarrow ABA = A^2 - A^3 = O_n$ ........................................................ **3p**

De aici $(AB)^2 = ABAB = O_n$ ........................................................ **1p**

Folosim egalitatea $I_n = I_n - (AB)^2 = (I_n - AB)(I_n + AB)$ ........................................................ **1p**

Avem $\det\left[(I_n - AB)(I_n + AB)\right] = \det(I_n - AB)\det(I_n + AB) = 1$, deci $\det(I_n + AB) \neq 0$ ........................................................ **2p**

**3.** Considerăm şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin $a_{n+1}^2 = a_{n-1} \cdot a_n,\ \forall n \geq 1,\ a_0 = 1$ şi $a_1 = 9$. Calculaţi limita $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

**Soluţie.** Din definiţie $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ ........................................................

Logaritmând în baza 3 $\Rightarrow$

$2\log_3 a_{n+1} = \log_3 a_{n-1} + \log_3 a_n \Rightarrow 2b_{n+1} = b_{n-1} + b_n$ şi $b_0 = 0, b_1 = 2$ unde am notat $b_n = \log_3 a_n$ ........................................................

Rezolvând ecuaţia caracteristică $2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow b_n = \frac{4}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ........................................................

Deoarece $a_n = 3^{b_n}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{4}{3} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3\sqrt[3]{3}$ ........................................................

Soluţia2: Avem $a_2 = 3,\ a_3 = 3^{\frac{3}{2}}, a_4 = 3^{\frac{5}{4}}$. Presupunem $a_n = 3^{b_n} \Rightarrow 3^{2b_{n+1}} = 3^{b_n}3^{b_{n-1}} \Rightarrow 2b_{n+1} = b_{n-1} + b_n$, adică recurenţa din soluţia1.

**4.** Întindem pe masă un pachet de cărţi şi le amestecăm după o anumită regulă. Apoi amestecăm iar aplicând aceeaşi regulă (i. e. dacă la prima amestecare cartea de pe poziţia $i$ a ajuns pe poziţia $j$, atunci la următoarea amestecare moua carte de pe poziţia $i$ ajunge pe poziţia $j$). Arătaţi că dacă amestecăm aplicând de ori de câte ori aceeaşi regulă, la un anumit număr de paşi, obţinem ordinea iniţială.

**Soluţie.** Dacă pachetul conţine $k$ cărţi, atunci fiecare amestecare este o permutare $\sigma \in S_k$ a cărţilor. ........................................................

Dacă elemental neutru $e$ este ordinea iniţială, atunci după $n$ amestecări ordinea este $\sigma^n$ ........................................................

Dacă $\operatorname{ord}(\sigma) = l$, atunci după $l$ amestecări obţinem ordinea iniţială. ........................................................

(Sau: există un număr finit de permutări de rang $k$, deci în şirul $e, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^n, \ldots$ există $\sigma^p = \sigma^{n+l}$, de unde $\sigma^l = e$)