



**30th Balkan Mathematical Olympiad
28 June - 3 July 2013, Agros - Cyprus**

**Contest day: Sunday 30 June 2013, 10.00 - 14.30
Place: RODON Resort, Agros**

LANGUAGE: ENGLISH

Read the instructions on the separate page before you begin.
Do all problems 1 through 4. Each problem is worth 10 points.
Time allowed: 4 hours and 30 minutes

Problem 1. In a triangle ABC , the excircle ω_a opposite A touches AB at P and AC at Q , and the excircle ω_b opposite B touches BA at M and BC at N . Let K be the projection of C onto MN , and let L be the projection of C onto PQ .

Show that the quadrilateral $MKLP$ is cyclic.

Problem 2. Determine all positive integers x , y and z such that

$$x^5 + 4^y = 2013^z.$$

Problem 3. Let S be the set of positive real numbers. Find all functions $f : S^3 \rightarrow S$ such that, for all positive real numbers x , y , z and k , the following three conditions are satisfied:

- (a) $xf(x, y, z) = zf(z, y, x)$,
- (b) $f(x, yk, k^2z) = kf(x, y, z)$,
- (c) $f(1, k, k + 1) = k + 1$.

Problem 4. In a mathematical competition some competitors are friends; friendship is always mutual, that is to say that when A is a friend of B , then also B is a friend of A . We say that $n \geq 3$ different competitors A_1, A_2, \dots, A_n form a *weakly-friendly cycle* if A_i is not a friend of A_{i+1} , for $1 \leq i \leq n$ ($A_{n+1} = A_1$), and there are no other pairs of non-friends among the components of this cycle.

The following property is satisfied:

for every competitor C , and every weakly-friendly cycle S of competitors not including C , the set of competitors D in S which are not friends of C has at most one element.

Prove that all competitors of this mathematical competition can be arranged into three rooms, such that every two competitors that are in the same room are friends.



A 30-a Olimpiadă Balcanică de Matematică
28 iunie - 3 iulie 2013, Agros - Cipru

30 iunie 2013, 10.00 - 14.30
RODON Resort, Agros

LANGUAGE: ROMANIAN

Citiți foaia cu instrucțiuni înainte de a începe.

Toate problemele sunt obligatorii. Fiecare problemă valorează 10 puncte.

Timp de lucru: 4 ore și 30 minute

Problema 1. În triunghiul ABC , cercul exînscriș ω_a , corespunzător vârfului A , este tangent dreptei AB în P și dreptei AC în Q , iar cercul exînscriș ω_b , corespunzător vârfului B , este tangent dreptei BA în M și dreptei BC în N . Fie K proiecția lui C pe MN , și L proiecția lui C pe PQ .

Să se arate că patrulaterul $MKLP$ este inscriptibil.

Problema 2. Să se determine toate numerele naturale nenule x , y și z astfel încât

$$x^5 + 4^y = 2013^z.$$

Problema 3. Fie S mulțimea numerelor reale strict pozitive. Să se găsească toate funcțiile $f : S^3 \rightarrow S$ care satisfac condițiile

(a) $xf(x, y, z) = zf(z, y, x)$,

(b) $f(x, yk, k^2z) = kf(x, y, z)$,

(c) $f(1, k, k + 1) = k + 1$.

pentru orice numere reale strict pozitive x , y , z și k .

Problema 4. La un concurs de matematică unii elevi participanți sunt prieteni; prietenia este întotdeauna mutuală, adică dacă A este prieten cu B atunci și B este prieten cu A . Spunem că n elevi diferiți ($n \geq 3$) A_1, A_2, \dots, A_n formează un *ciclu slab-prietenos* dacă A_i nu este prieten cu A_{i+1} , pentru $1 \leq i \leq n$ ($A_{n+1} = A_1$), și nu mai există în acest ciclu alte perechi de neprieteni.

Presupunem că este satisfăcută următoarea proprietate:

pentru orice elev C , orice ciclu slab-prietenos S care nu-l conține pe C are cel mult un elev care nu este prieten cu C .

Să se arate că toți elevii pot fi repartizați în trei camere, astfel încât oricare doi elevi din aceeași cameră sunt prieteni.