Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a IX-a

1. a) Fie $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ şi $x, y, z \in [a, b]$. Demonstrați că media aritmetică a numerelor x, y şi z se găseşte de asemenea în intervalul $[a, b]$.

b) Fie A_1, A_2, A_3 trei puncte necoliniare. Notăm $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{u}$ şi $\overrightarrow{A_2A_3} = \vec{v}$. Pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 4$, notăm cu A_n centrul de greutate al triunghiului $A_{n-1}A_{n-2}A_{n-3}$, iar pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, considerăm $x_n, y_n \in \mathbf{R}$ astfel încât $\overrightarrow{A_1A_n} = x_n\vec{u} + y_n\vec{v}$.

i. Calculați x_6 şi y_6.

ii. Arătați că pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 5$, avem $x_n \in \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$ si $y_n \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$.

Prof. Daly Marciuc

2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir definit prin: $a_1 = \frac{1}{2}$ şi $a_{n+1} + a_n = \frac{2}{n^2+2n}$, $\forall n \geq 1$.

a. Aflați termenul general al sirului.

b. Calculați suma $S = \sum_{k=1}^{n}(2k+1)a_k^2$ şi arătați că $S < 1$.

Prof. Traian Tămâian

3. Considerăm paralelogramul $ABCD$ şi fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Fie punctul M pe segmentul $[AD]$ şi fie punctul D pe segmentul $[NC]$. Să se arate că punctele G, M, N sunt coliniare dacă şi numai dacă $\frac{CN}{ND} - \frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$.

Gazeta Matematică

4. În triunghiul ABC cu m$(\angle ACB) = 90°$, considerăm punctele M∈(BC), Q∈(AB) respectiv

N∈(AC) astfel încât MQNC să fie dreptunghi. Dacă punctele I şi G sunt centrul cercului înscris

Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a IX-a

Barem de corectare

1. a. Demonstrarea proprietății – **2p**. b. Găsirea relației de recurență și a primilor trei termeni ai șirurilor – **1p**.

$x_4=\frac{2}{3}$, $y_4=\frac{1}{3}$, $x_5=\frac{8}{9}$, $y_5=\frac{4}{9}$, $x_6=\frac{23}{27}$, $y_6=\frac{16}{27}$ – **2p**

$x_5, x_6, x_7 \in \left[\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right]$ şi $y_5, y_6, y_7 \in \left[\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right]$ – **1p**

Demonstrarea prin inducție – **1p**.

2. **a)** $a_2=\frac{1}{2\cdot 3}$ şi $a_3=\frac{1}{3\cdot 4}$ **1p**

P(n) : $a_n=\frac{1}{n\cdot(n+1)}$ **1p**

Demonstrația prin inducție **2p**

b) S $=\sum_{1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}<1$ **3p**

3. A,I,G coliniare dacă şi numai dacă $\exists\propto\in\mathbb{R}$,$\overrightarrow{AG}=\propto\overrightarrow{AI}$ **1p**

$\overrightarrow{AI}=\frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$ **1p**

$\overrightarrow{AL}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$, AI$\cap BC=\{L\}$ **1p**

Notăm AQ $=x$, $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{c}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ **1p**

$\overrightarrow{AG}=\propto\overrightarrow{AI}$ devine $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{c}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\propto b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{\propto c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$ **1p**

$\frac{x}{2c}=\frac{\propto b}{a+b+c}$ şi $\frac{1}{2}=\frac{\propto c}{a+b+c}$ **1p**

Deci raportul lor va fi $\frac{x}{c}=\frac{b}{c}$ adică x $=$ b, AQ $=$ AC.

4. Fixarea reperului $\overrightarrow{AD}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{v}$ – 1p

$\frac{CN}{ND} = k_1$, $\frac{AM}{MD} = k_2$; punctele G , M si N sunt coliniare dacă şi numai dacă

$\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AG} + (1-\alpha)\overrightarrow{AN}$ – 1p;

$\overrightarrow{AM} = \frac{k_2}{1-k_2}$ – 1p; $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$ – 1p; $\overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AC} - k_1\overrightarrow{AD}}{1-k_1} = \vec{u} + \frac{1}{1-k_1}\vec{v}$ – 1p;

$k_1 - k_2 = \frac{1}{2}$ – 2p.

triunghiului ABC, respectiv centrul dreptunghiului MQNC, demonstrați că punctele A, I, G sunt coliniare dacă şi numai dacă AQ = AC.

Prof. Alexandru Blaga