Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală – Vaslui, 15 februarie 2015

Clasa a VIII-a

Problema 1. Să se rezolve în Z ecuația: $\sqrt{x^2-2000}+\sqrt{2074-x^2}=|44x+1992|$.

Problema 2. Aflați numerele întregi n, astfel încât $\sqrt{24n+1}$ să fie număr natural.

Problema 3. Fie ABCD un paralelogram cu $AC \perp AD$. Notăm cu S simetricul lui A față de mijlocul laturii CD și cu Q proiecția lui C pe diagonala BD. Demonstrați că $\sphericalangle SDQ \equiv \sphericalangle SAQ$.

Gazeta Matematică

Problema 4. În planul α se consideră segmentul $[AB]$ având lungimea de 12 cm și două puncte mobile M și N, simetrice față de punctul O, mijlocul segmentului $[AB]$, astfel încât $[AB] \equiv [MN]$.Pe perpendiculara în punctul A pe planul α se consideră punctul P, la distanță de $2\sqrt{7}$ cm de punctul A.

a) Să se afle perimetrul triunghiului PMN de arie maximă;
b) Dacă punctul S este simetricul punctului P față de punctul O, să se afle distanța de la punctul A la planul patrulaterului PMSN, care are arie maximă.

Notă. Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 1 la 7 puncte.

Din oficiu se acordă 4 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală – Vaslui, 15 februarie 2015

Soluții și bareme orientative - Clasa a VIII-a

Problema 1. Să se rezolve în Z ecuația: $\sqrt{x^2-2000}+\sqrt{2074-x^2}=|44x+1992|$.

Soluție. 1p din oficiu

Condiția de existență a radicalului:

$$x^2-2000 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 2000$$

$2074-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 2074$, deci $\Rightarrow 2000 \leq x^2 \leq 2074$

(1p)

Cum $x \in$ Z $și$ $2000 \leq x^2 \leq 2074 \Rightarrow x \in \{-45; 45\}$

(1p)

Pentru:

$x=\pm 45 \Rightarrow \sqrt{x^2-2000}=\sqrt{25}=5$ $și$ $\sqrt{2074-x^2}=\sqrt{49}=7$, $deci$ $12=|44x+1992|$

(2p)

Dacă $x=45$ $obținem$ $12=|44\cdot 45+1992|(F)$

Dacă $x=-45$ $obținem$ $12=|44\cdot(-45)+1992|(A)$, $și$ $rezultă$ $x=-45$

Deci $S=\{-45\}$

(2p)

Problema 2. Aflați numerele întregi n, astfel încât $\sqrt{24n+1}$ să fie număr natural.

Soluție. 1p din oficiu

Condiția de existență a radicalului $24n+1\geq 0 \Rightarrow n\geq -\frac{1}{24}$ și $n\in\mathbb{Z}\Rightarrow n\in\mathbb{N}$ **0,5p**

24n+1 număr impar și cum $\sqrt{24n+1}\in\mathbb{N}\Rightarrow 24n+1=(2k+1)^2,(\forall)k\in\mathbb{N}$....................**1p**

Obținem $24n+1=4k^2+4k+1\Rightarrow 24n=4k(k+1)\Rightarrow n=\frac{k(k+1)}{6}$ **1p**

Cum $n\in\mathbb{N}\Rightarrow k(k+1)\vdots 6$ **0,5p**

Dar k și k+1 sunt numere consecutive și rezultă $k(k+1)\vdots 2,(\forall)k\in\mathbb{N}$........................**1p**

Deci $k(k+1)\vdots 3\Rightarrow k=3t$ sau $k=3t+2,(\forall)t\in\mathbb{N}$ **1p**

Dacă: $k=3t\Rightarrow n=\frac{t(3t+1)}{2}$

$k=3t+2\Rightarrow n=\frac{(3t+2)(t+1)}{2}$

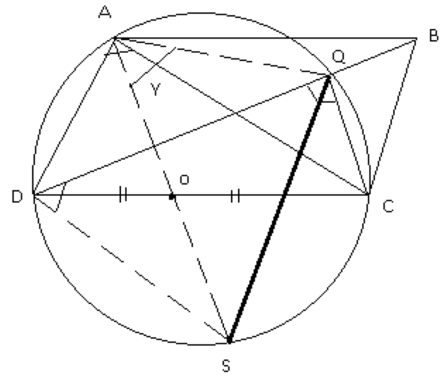
Deci $n\in\left\{\frac{t(3t+1)}{2}\right\}\cup\left\{\frac{(3t+2)(t+1)}{2}\right\}$, unde $t\in\mathbb{N}$ ....**Finalizare 1p**

Obs. Pentru aflarea unor valori ale lui n se acordă 1 punct.

Problema 3. Fie ABCD un paralelogram cu $AC \perp AD$. Notăm cu S simetricul lui A față de mijlocul laturii CD și cu Q proiecția lui C pe diagonala BD. Demonstrați că $\sphericalangle SDQ \equiv \sphericalangle SAQ$.

Gazeta Matematică

Soluția 1. 1p din oficiu



În $\Delta ADC : (AO)$ mediană relativă ipotenuzei $\Rightarrow AO = OD = OC (1)$

Analog în $\Delta QDC \Rightarrow OD = OC = OQ (2)$

Dar AO=OS (3)

Deci punctele A,Q,C,S,D $\in$ C(O,OA)

____ **(4p)**

Unghiurile SDQ și SAQ sunt înscrise în cerc și obținem:

$$m(\sphericalangle SDQ) = \frac{m\left(\widehat{QS}\right)}{2} = m(\sphericalangle QAS)$$

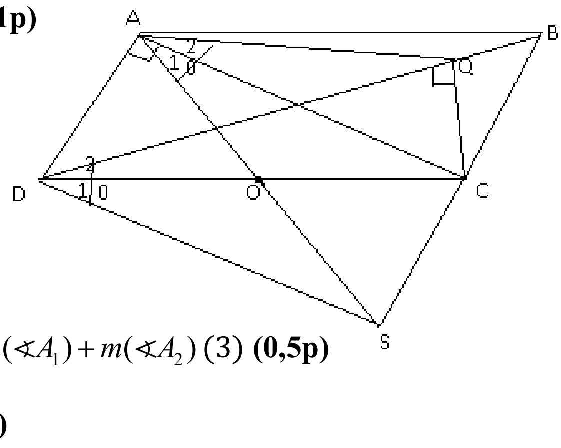
____ **(1,5p)**

Deci $\sphericalangle SDQ \equiv \sphericalangle SAQ$ **(0,5p)**

<u>Soluția 2. 1p din oficiu</u>

Avem ADSC – dreptunghi $(diagonalele\ se\ înjumătățesc\ și\ are\ un\ unghi\ drept)$___ **2p**

Obținem $\sphericalangle SDC \equiv \sphericalangle SAC$ $(\widehat{D_1} \equiv \widehat{A_1})(1)$__________ **(1p)**



Dar ADCQ – patrulater inscriptibil pentru că $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle DQC (\sphericalangle 1dr)$ **(1p)**

Rezultă $\widehat{CDQ} \equiv \widehat{CAQ}$ $\left(\widehat{D_2} \equiv \widehat{A_2}\right)$ (2) **(1p)**

Avem $m\left(\widehat{SDQ}\right) = m\left(\widehat{D_1}\right) + m\left(\widehat{D_2}\right)$ și $m\left(\widehat{SAQ}\right) = m(\sphericalangle A_1) + m(\sphericalangle A_2)$ (3) **(0,5p)**

Din relațiile (1),(2),(3) obținem $\sphericalangle SAQ \equiv \sphericalangle SDQ$ **(0,5p)**

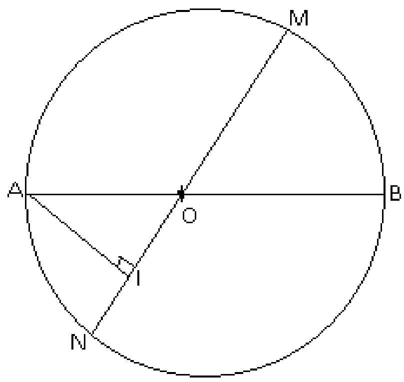
Problema 4. În planul α se consideră segmentul $[AB]$ având lungimea de 12 cm și două puncte mobile M și N, simetrice față de punctul O, mijlocul segmentului $[AB]$, astfel încât $[MN] \equiv [AB]$

Pe perpendiculara în punctul A pe planul α se consideră punctul P, la distanță de $2\sqrt{7}$ cm de punctul A.

a) Să se afle perimetrul triunghiului PMN de arie maximă;

b) Dacă punctul S este simetricul punctului P față de punctul O, să se afle distanța de la punctul A la planul patrulaterului PMSN, care are arie maximă.

Soluție. 1p din oficiu



a) $A_{PMN} = \dfrac{MN \cdot d(P, MN)}{2}$ maximă, dacă d(P,MN) maximă.

Rezultă că d(A,MN) este maximă.

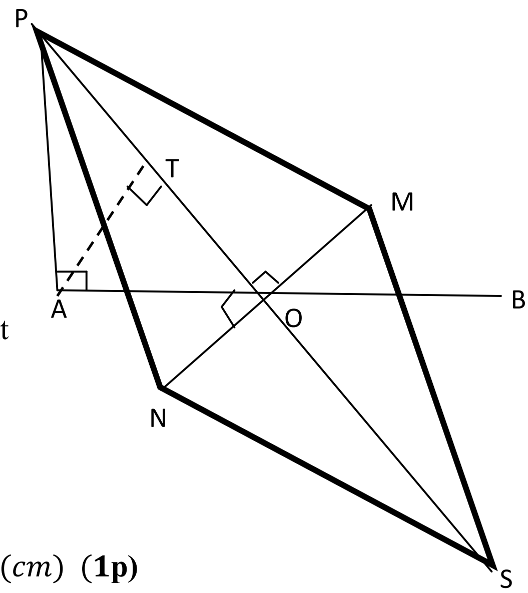
Fie $AI \perp MN, I \in (MN)$.

Din AB=MN și N=S_o(M) cu $O \in (AB); AO = OB$ rezultă că punctele

$A; B; M\ și\ N$ sunt conciclice și d (A; MN)
este maximă când AI=AO=6cm.
Deci $AO \perp MN$ ________________________________ **(1p)**

Din $PA \perp \alpha, AO \perp MN\ rezultă\ prin\ T_{3\perp}\ că\ PO \perp MN$ **(0,5p)**

PO=$\sqrt{PA^2 + AO^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{7}\right)^2 + 6^2} = \sqrt{64} = 8$__ **(0,5p)**



În $\Delta POM, aplicând\ T.P$ obținem PM=10 **(0,5p)**

În $\Delta PMN, PO \perp MN\ și\ MO = ON\ obținem\ \Delta PMN\ isoscel$

$P_{MNP} = 2 \cdot 10 + 12 = 32(cm)$ **(0,5p)**

b)PMSN este romb pentru că diagonalele se înjumătățesc și sunt perpendiculare, având aria maximă, pentru A_{PMN} maximă**. (1p)**

$Avem\ AO \perp MN, PO \perp MN\ și\ fie\ AT \perp PS$
$\Rightarrow prin\ TRT_{3\perp}\ că\ AT \perp (PMN)(\mathbf{1p})$

În $\Delta APD\ obținem\ prin\ Th_2: AT = \frac{AO \cdot AP}{PO} \Rightarrow AT = \frac{6 \cdot 2\sqrt{7}}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{2}(cm)$ **(1p)**