



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**Etapa locală 09.02.2013**

CLASA a XII-a

**Subiectul 1 (7 puncte)**

Fie  $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} / a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ .

- a) Să se arate că  $G$  este parte stabilă în raport cu operația de înmulțire a matricilor.  
b) Să se arate că dacă  $a, b, c \in \mathbb{R}$  atunci există  $x, y, z \in \mathbb{R}$  astfel încât:

$$(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^n = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

**Subiectul 2 (7 puncte)**

Fie  $I_n = \int_0^{\pi} e^x \cos nx dx, n \in \mathbb{N}^*$

- a) Să se calculeze  $I_1$ .  
b) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$

Gazeta Matematică nr.1/2012

**Subiectul 3 (7 puncte)**

Să se determine funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , care admit primitive și au proprietatea că  $(f \circ f)(x) = -x^3, \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Subiectul 4 (7 puncte)**

Să se calculeze integrala:

$$\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{x^n}{x^{3n+1} + x^{2n+2} + x^{2n} + x^{n+1} + x^{n-1} + 1} dx,$$

unde  $a > 0, n \in \mathbb{N}^*$ .

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.  
Timp de lucru 3 ore.  
Punctajul minim de calificare la etapa județeană a  
olimpiadei de matematică este de 14 puncte.