



Matematika tantárgyverseny
Megyei szakasz, 2013. március 9.

VI. OSZTÁLY

1. feladat. Az ABC egyenlő oldalú háromszögben D a (BC) félegyenes ellentétes félegyenesén van úgy, hogy $[DB] \equiv [BC]$. Az E pont az AD egyenes által meghatározott azon félsíkban van, amelyben nincs benne a B pont. Tudjuk, hogy az E pont távolsága az AB egyenestől egyenlő az $[EA]$ szakasz hosszával, az E pont távolsága a DC egyenestől pedig egyenlő az $[ED]$ szakasz hosszával és $EA = ED$. Legyen F egy olyan pont, amelyre $D \in (BF)$ és $[FD] \equiv [BC]$.

- Igazold, hogy $FDE\Delta \equiv BAE\Delta$.
- Igazold, hogy $[EB]$ az \widehat{AED} szög szögfelezője!

Gazeta Matematică

2. feladat. Hány olyan nyolcjegyű természetes szám van, amelynek felírásában szerepel a „2013” számjegysorozat? (egy ilyen szám például a 31020135.)

3. feladat

- Igazold, hogy 30007 összetett szám!
- Igazold, hogy a $37, 307, 3007, \dots, 3 \underbrace{00\dots0}_{n \text{ darab}} 7, \dots$ számsorozat végtelen sok összetett számot tartalmaz!

4. feladat. Adott az $n \geq 10$ természetes szám és az $A = \{1, 2, 3, \dots, 3n\}$ halmaz. Azt mondjuk, hogy az A halmaz egy X részhalmaza \mathcal{P} tulajdonságú, ha bármilyen $x \in X$ és $y \in X$ számok esetén, ha $x > y$, akkor $x + y$ nem osztható $x - y$ -nal.

- Adj példát olyan \mathcal{P} tulajdonságú X halmazra, amely legalább három elemet tartalmaz és tartalmazza a 4-est és a 14-est is!
- Bizonyítsd be, hogy van legalább egy n elemet tartalmazó, \mathcal{P} tulajdonságú halmaz!
- Bizonyítsd be, hogy nincs olyan n elemet tartalmazó, \mathcal{P} tulajdonságú halmaz, amely tartalmazza a 4-est és a 14-est is!

Munkaidő 2 óra + 30 perc kérdésekre.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană și a Municipiului București, 9 Martie 2013

CLASA a VI-a

Problema 1. Se consideră triunghiul echilateral ABC și punctul D pe semidreapta opusă semidreptei $(BC$, astfel încât $[DB] \equiv [BC]$. Considerăm punctul E în semiplanul determinat de dreapta AD ce nu conține punctul B , astfel încât $d(E, AB) = EA$, $d(E, DC) = ED$ și $EA = ED$, iar punctul F astfel ca $D \in (BF)$ și $[FD] \equiv [BC]$.

- Demonstrați că $\triangle FDE \equiv \triangle BAE$.
- Arătați că $[EB$ este bisectoarea unghiului \widehat{AED} .

Gazeta Matematică

Problema 2. Determinați câte numere de opt cifre conțin în scrierea lor secvența "2013". (un exemplu de astfel de număr este 31020135)

Problema 3. a) Arătați că 30007 este număr compus.

b) Arătați că șirul: 37, 307, 3007, ..., 3 $\underbrace{00\dots0}_\text{de } n \text{ ori}$ 7, ... conține o infinitate de termeni care sunt numere compuse.

Problema 4. Se consideră numărul natural n , $n \geq 10$ și mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 3n\}$. Spunem că mulțimea nevidă X , $X \subset A$ are proprietatea \mathcal{P} dacă oricare ar fi $x \in X$ și $y \in X$, $x > y$, numărul $x + y$ nu se divide cu numărul $x - y$.

- Dați un exemplu de mulțime X cu proprietate \mathcal{P} care conține numerele 4 și 14 și care are cel puțin trei elemente.
- Demonstrați că există cel puțin o mulțime cu proprietatea \mathcal{P} care are exact n elemente.
- Arătați că nu există o mulțime cu proprietatea \mathcal{P} care să aibă n elemente și să conțină numerele 4 și 14.

*Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*