Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galaţi
16 februarie 2013

Clasa a XI-a

Problema 1.

Fie $E(x,k)=\begin{vmatrix} \sqrt[3]{x} & \sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{k} \\ \sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{x} \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{x} & \sqrt[3]{k} \end{vmatrix}$, $x,\ k\in\mathbb{R}$,

a) Să se calculeze $E(-k,\ k)$ şi $E(\sin^2\alpha,\ \cos^2\alpha)$, $\alpha\in\mathbf{R}$.

b) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale inecuaţia $\sum_{k=1}^{2013} E(x,k)\geq 0$.

Milu Cârmaciu, profesor, Galaţi

Problema 2.

a) Să se calculeze E(k) = $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[k]{x}-\sqrt[k+2]{x}}{\sqrt[k+1]{x}-\sqrt[k+3]{x}}$, $k\geq 2$, $k\in\mathbf{N}$.

b) Fie $P=\prod_{k=2}^{2n+1} E(k)$. Să se demonstreze că $P\in\mathrm{N},(\forall)n\in\mathrm{N}^*$.

Milu Cârmaciu, profesor, Galaţi

Problema 3. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir mărginit de numere reale pozitive cu proprietatea că $\sqrt{n\cdot x_n+n+1}-\sqrt{n\cdot x_n+1}\leq\dfrac{\sqrt{n}}{2}\leq\sqrt{n\cdot x_n+n}-\sqrt{n\cdot x_n},(\forall)n\geq 1$. Să se demonstreze că şirul este convergent.

Problemă selectată de
Vasile Popa, profesor, Galaţi
din G.M.nr.11,2012

Problema 4. Fie A şi B două matrice pătratice de ordinul doi cu elemente numere complexe, cu proprietatea $A\cdot B-B\cdot A=A$. Să se arate că $A\cdot B^n\cdot A=O_2,(\forall)n\in\mathbb{N},n\geq 1$.

Problemă selectată de
Vasile Popa, profesor, Galaţi
din G.M.nr.11,2012

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

16 februarie 2013

Clasa a XI-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

<table>
<tr><th>Nr. problemei</th><th>Soluţie, rezolvare</th><th>Punctaj</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1.</td><td>Aducem la forma cea mai simplă expresia dată. Se adună toate coloanele la prima coloană. Se scoate factor comun şi se obţine:
$$E(x,k)=2\cdot\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{k}\right)\cdot\begin{vmatrix}1 & \sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{k}\\ 1 & \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{x}\\ 1 & \sqrt[3]{x} & \sqrt[3]{k}\end{vmatrix}.$$
Se scade din linia a doua prima linie şi din a treia linie scădem a doua linie. Obţinem:
$$E(x,k)=2\cdot\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{k}\right)\cdot\begin{vmatrix}1 & \sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{k}\\ 0 & \sqrt[3]{x} & -\sqrt[3]{k}\\ 0 & -\sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{k}-\sqrt[3]{x}\end{vmatrix}=$$
$$=2\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{k}\right)\left(\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{k}-\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{k^2}\right)=-2(x+k);$$</td><td>3p</td></tr>
<tr><td>a)
$$E(-k,\ k)=\begin{vmatrix}-\sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{k} & 0\\ \sqrt[3]{k} & 0 & -\sqrt[3]{k}\\ 0 & -\sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{k}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & \sqrt[3]{k} & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt[3]{k}\\ 0 & -\sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{k}\end{vmatrix}=0.$$</td><td>1p</td></tr>
<tr><td>$$E\left(\sin^2\alpha,\ \cos^2\alpha\right)=-2\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)=-2,(\forall)\alpha\in R$$</td><td>1p</td></tr>
<tr><td>b) Folosind (1), obţinem:
$$-2(x+1)-2(x+2)-\ldots-2(x+2013)\geq 0\Rightarrow$$
$$2013x+(1+2+\ldots+2013)\leq 0\Rightarrow x\leq -1007.$$</td><td>2p</td></tr>
</table>

2.	a) Metoda 1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[k]{x}-\sqrt[k+2]{x}}{\sqrt[k+1]{x}-\sqrt[k+3]{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{\frac{1}{k}}-x^{\frac{1}{k+2}}}{x^{\frac{1}{k+1}}-x^{\frac{1}{k+3}}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{\frac{1}{k+2}}\cdot\left(x^{\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}}-1\right)}{x^{\frac{1}{k+3}}\cdot\left(x^{\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}}-1\right)}=$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{\frac{2}{(k+2)\cdot k}}-1}{x^{\frac{2}{(k+1)\cdot(k+3)}}-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(x^{\frac{1}{(k+2)\cdot k}}\right)^2-1}{\left(x^{\frac{1}{(k+1)\cdot(k+3)}}\right)^2-1}=$ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(x^{\frac{1}{(k+2)\cdot k}}-1\right)\cdot\left(x^{\frac{1}{(k+2)\cdot k}}+1\right)}{\left(x^{\frac{1}{(k+1)\cdot(k+3)}}-1\right)\cdot\left(x^{\frac{1}{(k+1)\cdot(k+3)}}+1\right)}=$ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{\frac{1}{(k+2)\cdot k}}-1}{x^{\frac{1}{(k+1)\cdot(k+3)}}-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{\frac{1}{(k+2)\cdot k}}-1}{x^{\frac{1}{(k+1)\cdot(k+3)}}-1}=$	
	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[(k+2)\cdot k]{x}-1}{\sqrt[(k+1)\cdot(k+3)]{x}-1}=\lim\limits_{x\to1}\left(\sqrt[(k+2)\cdot k]{x}-1\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt[(k+1)\cdot(k+3)]{x}-1}\right)=$	**1p** **1p**
	$\dfrac{1}{(k+2)\cdot k}\cdot\dfrac{(k+1)\cdot(k+3)}{1}=\dfrac{(k+1)\cdot(k+3)}{(k+2)\cdot k}.$	**1p**
	Metoda 2. Folosind $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt[m]{x^{m-1}}+\sqrt[m]{x^{m-2}}+...+\sqrt[m]{x}+1\right)}=\dfrac{1}{m}$, m≥2, se obţine:	**1p**
	$E(k)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{\sqrt[k]{x}-1}{x-1}-\dfrac{\sqrt[k+2]{x}-1}{x-1}}{\dfrac{\sqrt[k+1]{x}-1}{x-1}-\dfrac{\sqrt[k+3]{x}-1}{x-1}}=\dfrac{\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}}{\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+3}}=$	2p
	$\dfrac{2}{k(k+2)}\cdot\dfrac{(k+1)(k+3)}{2}=\dfrac{(k+1)(k+3)}{k(k+2)}$	2p

	b) P = E(2) $\cdot$ E(3) $\cdot$ E(4) $\cdot$ … $\cdot$ E(2n) $\cdot$ E(2n+1) = $= \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\cdot\frac{4\cdot 6}{3\cdot 5}\cdot\frac{5\cdot 7}{4\cdot 6}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n+1)(2n+3)}{2n(2n+2)}\cdot\frac{(2n+2)(2n+4)}{(2n+1)(2n+3)} =$ $= \frac{(2n+2)(2n+4)}{2\cdot 4} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{2m}{2} = m \in \mathbf{N}^*, m \in \mathbf{N}^*,$ deoarece (n+1)(n+2) = 2m=nr. par (fiind produs de două numere naturale consecutive).	**1p** **1p**
3.	$\sqrt{n\cdot x_n + n + 1} - \sqrt{n\cdot x_n + 1} \le \frac{\sqrt{n}}{2} \le \sqrt{n\cdot x_n + n} - \sqrt{n\cdot x_n}, (\forall) n \ge 1. \Leftrightarrow$ $\frac{n}{\sqrt{n\cdot x_n + n + 1} + \sqrt{n\cdot x_n + 1}} \le \frac{\sqrt{n}}{2} \le \frac{n}{\sqrt{n\cdot x_n + n} + \sqrt{n\cdot x_n}} \Leftrightarrow$ $\sqrt{x_n + 1} + \sqrt{x_n} \le 2 \le \sqrt{x_n + \frac{n+1}{n}} + \sqrt{x_n + \frac{1}{n}}$ (1) Fie funcţia $f:[0.\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x}.$ Relaţia (1) se scrie: $f(x_n) \le f\left(\frac{9}{16}\right) \le f\left(x_n + \frac{1}{n}\right).$ Funcţia f este strict crescătoare pe $[0,\infty) \Rightarrow x_n \le \frac{9}{16} \le x_n + \frac{1}{n} \Leftrightarrow 0 \le \frac{9}{16} - x_n \le \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{9}{16}.$	**1p** **1p** **1p** **2p** **1p** **1p**

4.	$A\cdot B-B\cdot A=A\Leftrightarrow A\cdot B=B\cdot A+A\Leftrightarrow A\cdot B=\left(B+I_2\right)\cdot A$ (1) $BA=A\cdot\left(B-I_2\right)$ (2) Analizăm cazurile: I. $\det A\neq 0$. Din (1) şi (2) $\Rightarrow \det A\cdot\det B=\det\left(B+I_2\right)\cdot\det A$ şi $\det B\cdot\det A=$ $\det A\cdot\det\left(B-I_2\right)$; $\begin{cases}\det B=\det\left(B+I_2\right)\\ \det B=\det\left(B-I_2\right)\end{cases}$ (3) Considerăm $\det\left(B-xI_2\right)=\det B-\alpha\cdot x+x^2$. Relaţiile (3) devin: $\begin{cases}\det B=\det B+\alpha+1\\ \det B=\det B-\alpha+1\end{cases}\Rightarrow -1=1(F)$. II. $\det A=0$, $\mathrm{Tr}\left(AB-BA\right)=TrA\Rightarrow TrA=0\Rightarrow A^2=O_2$. $A\cdot B\cdot A=B\cdot A^2+A^2=O_2$; In relaţia din enunţ, avem: $A\cdot B=B\cdot A+A\,/\cdot\left(B\cdot A\right)\Rightarrow$ $A\cdot B^2\cdot A=B\cdot\left(A\cdot B\cdot A\right)+A\cdot B\cdot A=O_2$. Demonstrăm prin inducţie matematică $A\cdot B^n\cdot A=O_2,\left(\forall\right)n\geq 1$. Presupunem că $A\cdot B^n\cdot A=O_2$. $AB=BA+A\,/\cdot\left(B^n\cdot A\right)\Rightarrow A\cdot B^{n+1}\cdot A=B\left(AB^nA\right)+AB^nA=O_2$. În concluzie $A\cdot B^n\cdot A=O_2,\left(\forall\right)n\geq 1$.	**1p** 1p **1p** **1p** 1p 2p