INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DÂMBOVIŢA **SSMR DÂMBOVIŢA**

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 28 februarie 2015

<u>CLASA a XI-a</u>

<u>Subiectul 1</u>. Fie A și B două matrice patratice de ordinul 2 cu elemente reale având proprietatea că $AB - BA = A^2$.

Să se arate că $(B - A)^{2015} = B^{2014}(B - 2015A)$.

GM 9/2014(enunț adaptat)

<u>Subiectul 2</u>. Fie A o matrice de ordinul doi cu elemente reale și A^t matricea transpusă. Știind că $det(A + A^t) = 8$ și $det(A + 2A^t) = 27$. Să se calculeze $detA$.

GM 11/2014

<u>Subiectul 3</u>. Calculați

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 0}\left(1 + (tgx)^2 + \left(tg(2x)\right)^2 + \cdots + \left(tg(nx)\right)^2\right)^{\frac{1}{x^2}}\right)^{\frac{1}{n^3}}$$

***

<u>Subiectul 4</u>. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$ două șiruri de numere reale definite prin $x_0 > 1$ și ${x_{n+1}}^2 - 2x_{n+1} = x_n - 2$, iar $y_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \cdots - \frac{1}{2^n}$. Calculați $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - 2}{y_n}$.

***

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.
Timp de lucru 3 ore

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

CLASA A XI-a

28 februarie 2015

Barem de corectare

Subiectul 1. Fie A și B două matrice patratice de ordinul 2 cu elemente reale având proprietatea că $AB - BA = A^2$.

Să se arate că $(B-A)^{2015} = B^{2014}(B - 2015A)$.

GM 9/2014(enunț adaptat)

Soluţie: Inductiv se demonstrează că în general $(B-A)^{n+1} = B^n(B-(n+1)A)$.

n=1$\Rightarrow$ $(B-A)^2 = B^2 - BA - AB + A^2 = B^2 - 2BA + BA - AB + A^{\,2} = B(B-A)$...2p

P$(k) \Longrightarrow P(k+1)$

$(B-A)^{k+2} = (B-A)^{k+1}(B-A) = B^k(B-(k+1)A)(B-A) = B^k(B^2 - BA - (k+1)AB + (k+1)A^2) = B^k(B^2 - (k+2)BA + (k+1)BA - (k+1)AB + (k+1)A^2) = B^k(B^2 - (k+2)BA) = B^{k+1}(B-(k+1)A)$......................................4p

Finalizare 1p

Subiectul 2. Fie A o matrice de ordinul doi cu elemente reale și A^t matricea transpusă. Știind că $det(A + A^t) = 8$ și $det(A + 2A^t) = 27$. Să se calculeze $detA$.

GM 11/2014

Soluţie: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow det(A + A^t) = \begin{vmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{vmatrix} = 4ad - (b+c)^2 = 4ad - b^2 - 2bc - c^2 = 8 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .3p$

$det(A + 2A^t) = \begin{vmatrix} 3a & b+2c \\ 2b+c & 3d \end{vmatrix} = 9ad - (b+2c)(2b+c) = 9ad - 2b^2 - 5bc - 2c^2 = 27$...2p

Finalizare: $ad - bc = 11 \dots\dots\dots\dots$....2p

Subiectul 3. Calculați

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 0}\left(1 + (tgx)^2 + \big(tg(2x)\big)^2 + \cdots + \big(tg(nx)\big)^2\right)^{\frac{1}{x^2}}\right)^{\frac{1}{n^3}}$$

***

Soluție: $\lim_{x\to 0}\left(1+(tgx)^2+\left(tg(2x)\right)^2+\cdots+\left(tg(nx)\right)^2\right)^{\frac{1}{x^2}}=$

$\lim\limits_{x\to 0} e^{ln\left(1+(tgx)^2+\left(tg(2x)\right)^2+\cdots+\left(tg(nx)\right)^2\right)^{\frac{1}{x^2}}}=$

$\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\frac{ln\left(1+(tgx)^2+\left(tg(2x)\right)^2+\cdots+\left(tg(nx)\right)^2\right)}{(tgx)^2+\left(tg(2x)\right)^2+\cdots+\left(tg(nx)\right)^2}\left((tgx)^2+\left(tg(2x)\right)^2+\cdots+\left(tg(nx)\right)^2\right)}=$

$\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\left(\frac{(tgx)^2}{x^2}+\frac{\left(tg(2x)\right)^2}{4x^2}\cdot 4+\cdots+\frac{\left(tg(nx)\right)^2}{n^2x^2}\cdot n^2\right)\cdot x^2}=e^{1^2+2^2+\cdots+n^2}=e^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}\ldots\ldots 5p$

$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 0}\left(1+(tgx)^2+\left(tg(2x)\right)^2+\cdots+\left(tg(nx)\right)^2\right)^{\frac{1}{x^2}}\right)^{\frac{1}{n^3}}=$

$\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}\right)^{\frac{1}{n^3}}=e^{\frac{2}{6}}=\sqrt[3]{e}$..2p

Subiectul 4. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ și $(y_n)_{n\geq 0}$ două șiruri de numere reale definite prin $x_0>1$ și ${x_{n+1}}^2-2x_{n+1}=x_n-2$, iar $y_n=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-\cdots-\frac{1}{2^n}$. Calculați $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-2}{y_n}$.

***

Soluție: $(x_{n+1}-1)^2=x_n-1\Rightarrow x_{n+1}-1=\pm\sqrt{x_n-1}$..1p

Dacă $x_{n+1}-1=-\sqrt{x_n-1}\Longrightarrow x_{n+2}-1=-\sqrt{x_{n+1}-1}=-i\sqrt[4]{x_n-1}\notin \boldsymbol{R}$...................1p

Dacă $x_{n+1}-1=\sqrt{x_n-1}\Rightarrow x_n-1=\sqrt[2^n]{x_0-1}$(inductiv)..2p

Cum $y_n=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-\cdots-\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^n}$ avem

$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-2}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[2^n]{x_0-1}-1}{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x_0-1)^{\frac{1}{2^n}}-1}{\frac{1}{2^n}}=ln(x_0-1)$.....................3p