Inspectoratul Şcolar Judeţean
Harghita

Olimpiada de matematică – clasa a XII-a
etapa zonală – 27 februarie 2016

1. Calculați: $\int \arcsin(\cos x)dx$, dacă $x \in [0, 2\pi]$

2. Dați exemplu de monoid comutativ cu 4 elemente astfel încât interiorul tablei operației să conțină elementele monoidului de câte 1, 2, 3 respectiv 10 ori.

3. Să se arate că nu există funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admite o primitivă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât $xf(x) = x + F(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

4. Cel puțin câte elemente trebuie să alegem arbitrar din grupul $\left(\mathbb{Z}_{2016}, +\right)$ astfel încât printre acestea să fie sigur trei elemente (nu neapărat distincte) ale căror sumă este $\hat{0}$?

Inspectoratul Şcolar Judeţean Harghita

Olimpiada de matematică – clasa a XII-a
etapa zonală – 27 februarie 2016
Soluții și bareme

1. Calculați: $\int \arcsin(\cos x)dx$, dacă $x \in [0,2\pi]$

Soluție

$\arcsin(\cos x) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, x \in [0,\pi] \\ x - \frac{3\pi}{2}, x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$ **3p**

$\Rightarrow \int \arcsin(\cos x)dx = \begin{cases} \frac{\pi x - x^2}{2} + c, x \in [0,\pi] \\ \frac{x^2 - 3\pi x}{2} + \pi^2 + c, x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$, unde $c \in \mathbb{R}$ **4p**

2. Dați exemplu de monoid comutativ cu 4 elemente astfel încât interiorul tablei operației să conțină elementele monoidului de câte 1, 2, 3 respectiv 10 ori.

Soluție

Fie $M = \{e,a,b,c\}$, unde e este elementul neutru, acesta fiind elementul care apare o singură dată (toate celelalte apar în produsele ex și xe **1p**

Fie a elementul care apare de două ori, deci în produsele $ea = ae$ și b elementul care apare de 3 ori, deci în produsele $eb = be$ și încă un element pe diagonală, deoarece monoidul este comutativ. **2p**

Următorul tabel de operație corespunde cerinței:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	c
b	b	c	c	c
c	c	c	c	c

....

Trebuie verificată asociativitatea. Dacă $\{e,c\} \cap \{x,y,z\} \neq \emptyset$, atunci evident $x(yz) = (xy)z$. Dacă $\{e,c\} \cap \{x,y,z\} = \emptyset$, avem de verificat cazurile $(aa)b = a(ab)$, $(ab)b = a(bb)$ și perumtările acestora, care din comutativitate sunt echivalente cu acestea, toate acestea sunt adevărate, deci este asociativă. ....

3. Să se arate că nu există funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admite o primitivă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât $xf(x) = x + F(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Soluție

Din relația din enunț rezultă $F(0) = 0$ . ...

Dacă $x \neq 0$, avem $f(x) = 1 + \frac{F(x)}{x}$ ....

Trecând la limită în această relație, obținem $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 + \lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x}$ **(1).** ....

Din teorema lui Lagrange $\lim_{x \to 0} F'(x) = F'(0)$, deci $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ . ...

Pe de altă parte $\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(0) = f(0)$ . ...

Relația **(1)** devine $f(0) = 1 + f(0)$ contradicție, deci nu există astfel de funcție. ....

4. Cel puțin câte elemente trebuie să alegem arbitrar din grupul $\left(\mathbb{Z}_{2016}, +\right)$ astfel încât printre acestea să fie sigur trei elemente (nu neapărat distincte) ale căror sumă este $\hat{0}$?

Soluție

Dacă alegem toate elementele impare, atunci oricare trei dintre acestea are suma impară, adică nu poate fi $2016k = \hat{0}$. Deci trebuie să alegem cel puțin 1009 de elemente. . ...

În continuare vom arăta că acesta este suficient. Dacă $A = \left\{x_0, x_1, \ldots, x_{1008}\right\}$ cu $x_0 < x_1 < \ldots < x_{1008}$ este o submulțime arbitrară cu 1009 de elemente a mulțimii $\mathbb{Z}_{2016}$, atunci mulțimea $B = \left\{x_0 + x_1, x_0 + x_2, \ldots, x_0 + x_{1008}\right\}$ are 1008 elemente. . ...

Mulțimea simetricelor elementelor mulțimii A, $A' = \{-x_0, -x_1, \ldots, -x_{1008}\}$ conține 1009, deci $A' \cap B \neq \emptyset$. Deci există $i, j \in \{0, 1, \ldots, 1008\}$ astfel încât $-x_i = x_0 + x_j$, deci $x_i + x_0 + x_j = \hat{0}$. **3p**