OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 5. 03. 2016

Clasa a XII – a

Problema 1. Să se calculeze $\int \frac{12x+17}{(x+2)(2x+3)(3x+4)(6x+5)+2016}\,\mathrm{d}x,\ x\in(0;\infty)$.

Problema 2. Fie $(G,\cdot)$ un grup multiplicativ având elementul neutru e şi $x,y\in G$. Să se arate că dacă $x^2=e$ şi $xyx=y^3$, atunci $y^8=e$.

Problema 3. Să se arate că dacă H_1 şi H_2 sunt două subgrupuri ale unui grup $(G,\cdot)$, astfel încât $G=H_1\cup H_2$, atunci $H_1=G$ sau $H_2=G$.

Problema 4. Fie $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu proprietatea că

$$(b-a)\cdot f'(x)\le k,\ (\forall)\ x\in[a,b].$$

Să se arate că $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \le \frac{k}{2}+f(a)$.

[1]Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2]Toate problemele sunt obligatorii;
[3]Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 5. 03. 2016
BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII – a

Problema 1. Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{12x+17}{(x+2)(2x+3)(3x+4)(6x+5)+2016}\,\mathrm{d}x, \quad x\in(0;\infty).$

Barem de corectare. Dacă notăm cu I integrala din enunţ, avem:

(2p) $\displaystyle I=\int \frac{12x+17}{(6x^2+17x+10)(6x^2+17x+12)+2016}\,\mathrm{d}x$

(3p) $\displaystyle \quad =\int \frac{12x+17}{(6x^2+17x+11)^2+2015}\,\mathrm{d}x$

(2p) $\displaystyle \quad =\frac{1}{\sqrt{2015}}\cdot arctg\frac{6x^2+17x+11}{\sqrt{2015}}+\mathcal{C}.$

Problema 2. Fie $(G,\cdot)$ un grup multiplicativ având elementul neutru e şi $x,y\in G$. Să se arate că dacă $x^2=e$ şi $xyx=y^3$, atunci $y^8=e$.

Barem de corectare.

(1p) Arătăm că $y^9=y$. Într-adevăr,

(2p) $y^9=y^3\cdot y^3\cdot y^3=xyx\cdot xyx\cdot xyx$

(1p) $\quad =x\cdot y^3\cdot x$

(2p) $\quad =x\cdot xyx\cdot x=x^2\cdot y\cdot x^2=y,$

(1p) de unde, $y^8=e$.

Problema 3. Să se arate că dacă H_1 şi H_2 sunt două subgrupuri ale unui grup $(G,\cdot)$, astfel încât $G=H_1\cup H_2$, atunci $H_1=G$ sau $H_2=G$.

Barem de corectare.

(1p) Presupunem contrariul. Dacă $H_1\neq G$ şi $H_2\neq G$,

(1p) atunci $H_1\setminus H_2\neq\emptyset$ şi $H_2\setminus H_1\neq\emptyset$.

(2p) Fie $h_1\in H_1\setminus H_2$ şi $h_2\in H_2\setminus H_1$. Din $h_1\cdot h_2\in G=H_1\cup H_2$, deducem că $h_1\cdot h_2\in H_1$ sau $h_1\cdot h_2\in H_2$.

(2p) Deoarece, $(h_1\cdot h_2\in H_1\Rightarrow h_2\in H_1)$, iar $(h_1\cdot h_2\in H_2\Rightarrow h_1\in H_2)$, în ambele cazuri obţinem contradicţii cu alegerea elementelor $h_1\in H_1\setminus H_2$ şi $h_2\in H_2\setminus H_1$.

(1p) Aşadar, $H_1=G$ sau $H_2=G$.

Problema 4. Fie $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu proprietatea că

$$(b - a) \cdot f'(x) \leq k, \ (\forall) \ x \in [a, b].$$

Să se arate că $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leq \frac{k}{2} + f(a)$.

Barem de corectare.

$(2p)$ Aplicând teorema lui Lagrange funcţiei f pe intervalul $[a, x]$, deducem că exstă $c_x \in (a, x)$ astfel ca $f(x) - f(a) = f'(c_x)(x - a)$.

$(2p)$ Deoarece $f'(x) \leq \frac{k}{b-a}$, $(\forall) \ x \in [a, b]$, obţinem că $f(x) \leq \frac{k}{b-a} \cdot (x - a) + f(a)$, $(\forall) \ x \in [a, b]$, de unde

$(1p)$ $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b \left(\frac{k}{b-a}(x-a) + f(a) \right) \mathrm{d}x$

$(1p)$ $\quad = (b - a) \left(\frac{k}{2} + f(a) \right)$, adică

$(1p)$ $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leq \frac{k}{2} + f(a)$.

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.