Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galaţi
16 februarie 2013

Clasa a X-a

Problema 1.

a). Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left(11+6\sqrt{2}\right)^x=6\cdot\left(3+\sqrt{2}\right)^x-7$.

b). Să se determine numerele naturale n pentru care are loc egalitatea:
$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n=2$.

Problemă selectată de
Viorica Bujor, profesor, Galaţi

Problema 2. Fie $z_A, z_B\in\mathbb{C}$, afixele punctelor A respectiv B, de forma:

$z_A=a+b\cdot i,\ z_B=b+a\cdot i,\ a,b\in\mathbb{R}^*,\ b<a$.

a). Să se determine o relaţie între a şi b, astfel ca triunghiul AOB să fie echilateral. Să se determine triunghiurile echilaterale OAB cu aria $\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

b). În condiţia $0<b<a$, pe latura AB a triunghiului echilateral OAB se construiesc pătratele $ABCD,\ ABC'D'$. Să se calculeze afixele punctelor $C,\ D,\ C',\ D'$ în funcţie de b.

Ioan Toderiţă, profesor, Galaţi

Problema 3. Fie numerele reale $a,b,x_1,\ x_2,\ x_3,...,x_n\in(0,1)$ astfel încât $b^n\le x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot...\cdot x_n$. Să se demonstreze că $\left(\log_a b\right)^n\ge\log_a x_1\cdot\log_a x_2\cdot\log_a x_3\cdot...\cdot\log_a x_n$.

Problemă selectată de

Viorica Bujor, profesor, Galaţi

din G.M.nr.11,2012

Problema 4. Să se demonstreze că nu există nicio funcţie $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ care verifică simultan proprietăţile:

a). $f(x+y)+f(x\cdot y^2)=f(x)\cdot f(y^3)+1,\ (\forall)x,y\in\mathbb{Z}$

b). $f(1)=2$.

Constantin Ursu, profesor, Galaţi

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

16 februarie 2013

Clasa a X-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
	a). $11+6\sqrt{2}=\left(3+\sqrt{2}\right)^2$. $\left(11+6\sqrt{2}\right)^x=6\cdot\left(3+\sqrt{2}\right)^x-7 \Leftrightarrow \left(3+\sqrt{2}\right)^{2\cdot x}=6\cdot\left(3+\sqrt{2}\right)^x-7.$ Notăm $\left(3+\sqrt{2}\right)^x=t, t>0$. $t^2=6\cdot t-7 \Leftrightarrow t^2-6\cdot t+7=0 \Rightarrow t_1=3+\sqrt{2}; t_2=3-\sqrt{2};$ Ecuaţia devine $\left(3+\sqrt{2}\right)^x=3+\sqrt{2} \Leftrightarrow x=1;$ $\left(3+\sqrt{2}\right)^x=3-\sqrt{2} \Leftrightarrow \left(3+\sqrt{2}\right)^x=\frac{1}{3+\sqrt{2}} \Leftrightarrow x=\frac{\lg(3-\sqrt{2})}{\lg(3+\sqrt{2}}.$ Soluţiile ecuaţiei sunt: 1 şi $\frac{\lg(3-\sqrt{2})}{\lg(3+\sqrt{2}}$.	**1p** **1p** **1p**

	b).	
	$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n=\cos\frac{2n\pi}{3}+i\sin\frac{2n\pi}{3};$	1p
	$\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n=\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^n=\cos\frac{4n\pi}{3}+i\sin\frac{4n\pi}{3};$	1p
	$\cos\frac{2n\pi}{3}+i\sin\frac{2n\pi}{3}+\cos\frac{4n\pi}{3}+i\sin\frac{4n\pi}{3}=$	
	$2\cos(n\pi)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)+2i\sin(n\pi)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)=2\cdot(-1)^n\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right);$	1p
	$2\cdot(-1)^n\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)=2\Leftrightarrow(-1)^n\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)=1\Rightarrow$	
	$\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)=(-1)^n\Rightarrow\frac{n\pi}{3}=k\pi\Rightarrow n=3k, k\in\mathbb{Z}$	1p
	a).	
	Fie $\lvert z_A\rvert=\lvert z_A-z_B\rvert=\lvert z_B\rvert\Leftrightarrow\lvert a+ib\rvert=\lvert(a-b)\cdot(1+i)\rvert\Leftrightarrow$	
	$\sqrt{a^2+b^2}=\lvert a-b\rvert\cdot\sqrt{2}\Leftrightarrow$	
	$\Leftrightarrow a^2+b^2-4ab=0\Leftrightarrow(a-2b)^2=3b^2\Leftrightarrow$	
	$\lvert a-2b\rvert=b\sqrt{3}\Leftrightarrow a=2b\pm b\sqrt{3}\Leftrightarrow a=b\cdot\left(2\pm\sqrt{3}\right).$	2p
	Există două relaţii ce satisfac condiţia $a>b$.	
2.	1. $a=b\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)\Rightarrow z_A=b\cdot\left(2+\sqrt{3}+i\right)$ *sau* $z_A=2\cdot\lvert b\rvert\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right);$	
	$\lvert z_A\rvert=\lvert b\rvert\cdot\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+1}=2\cdot\lvert b\rvert\sqrt{2+\sqrt{3}}.$	1p
	2. $a=b\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)\Rightarrow z'_A=b\cdot\left(2-\sqrt{3}+i\right)$ *sau* $z'_A=2\cdot\lvert b\rvert\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right);$	
	$\lvert z'_A\rvert=\lvert b\rvert\cdot\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+1}=2\cdot\lvert b\rvert\sqrt{2+\sqrt{3}}.$	
	Analog, $z_B=b\cdot\left(1+\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot i\right)$ si $z'_B=b\cdot\left(1+\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot i\right).$	
	Există 2 triunghiuri echilaterale.	

	Din $S_{AOB}=\sqrt{3}\ cm^2 \Rightarrow l=2\ cm \Rightarrow \lvert a-b\rvert\cdot\sqrt{2}=2 \Leftrightarrow \lvert a-b\rvert=\sqrt{2}$. Dar pentru $a=b\left(2+\sqrt{3}\right)$, se obţine: $a-b=b\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)\Rightarrow \lvert a-b\rvert=\lvert b\rvert\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)=\sqrt{2}\Rightarrow$ $\lvert b\rvert=\dfrac{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\Rightarrow b_{1,2}=\pm\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\Rightarrow a_{1,2}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)$. Astfel, $z_A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\sqrt{3}+1+i\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)\right)$ şi $z'_A=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\sqrt{3}+1+i\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)\right)$, $z_B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\sqrt{3}-1+i\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)\right)$, $z'_B=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\sqrt{3}-1+i\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)\right)$.	**1p** **1p**
	b). Fie $z_D=x+iy, x,y\in\mathbb{R}$ Din $\left[AD\right]\equiv\left[BA\right]\Leftrightarrow \lvert z_A-z_D\rvert=\lvert z_B-z_A\rvert\Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=2\cdot(a-b)^2$ (1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=(x-a)\cdot\vec{i}+(y-b)\cdot\vec{j}$; $\overrightarrow{AB}=(b-a)\cdot\vec{i}+(a-b)\cdot\vec{j}$; $(x-a)\cdot(b-a)+(y-b)\cdot(a-b)=0, b\neq 0\Rightarrow x-y+b-a=0$ (2) Din (1), (2) $\Rightarrow$ $\begin{cases}x=2a-b\\ y=a\end{cases}\Rightarrow z_D=2a-b+i\cdot a$; sau $\begin{cases}x=b\\ y=2b-a\end{cases}\Rightarrow z'_D=b+i\cdot(2b-a)$ dar $z_A+z_C=z_D+z_B\Rightarrow z_C=z_D+z_B-z_A\Rightarrow z_C=a+i\cdot(2\cdot a-b)$; Analog, $z_{C'}=2\cdot b-a+b\cdot i$ $\begin{cases}z_C=b\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\cdot i\right)\\ z_D=b\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+i\right)\end{cases}$; $\begin{cases}z_{C'}=b\cdot\left(-\sqrt{3}+i\right)\\ z_{D'}=b\cdot\left(1-i\cdot\sqrt{3}\right)\end{cases}$	1p 1p

3	$\left.\begin{array}{l} b^n \le x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \\ a \in (0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \log_a b^n \ge \log_a \left(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n\right) \Leftrightarrow$	**3p**
	$\log_a b^n \ge \log_a x_1 + \log_a x_2 + \log_a x_3 + \ldots + \log_a x_n \Rightarrow$	
	$\log_a b \ge \dfrac{\log_a x_1 + \log_a x_2 + \log_a x_3 + \ldots + \log_a x_n}{n}$.	
	$\log_a x_i > 0 = \log_a 1, (\forall) i = \overline{1,n}$, deoarece numerele $a, x_i \in (0,1), (\forall) i = \overline{1,n}$	**1p**
	Se aplică inegalitatea mediilor:	
	$\log_a b \ge \dfrac{\log_a x_1 + \log_a x_2 + \ldots + \log_a x_n}{n} \ge \sqrt[n]{\log_a x_1 \cdot \log_a x_2 \cdot \ldots \log_a x_n} \Rightarrow$	**2p**
	$\log_a b \ge \sqrt[n]{\log_a x_1 \cdot \log_a x_2 \cdot \log_a x_3 \cdot \ldots \log_a x_n}$	
	Ridicând ambii membri la puterea a n-a, se obţine inegalitatea cerută.	**1p**

4.	**Metoda 1.** Deoarece $f\left(1\right)=2$, vom lua $y=1,\left(\forall\right)x\in\mathbb{Z}$. Se obţine: $f\left(x+1\right)+f\left(x\right)=f\left(x\right)\cdot f\left(1\right)+1,\left(\forall\right)x\in\mathbb{Z}\Rightarrow f\left(x+1\right)=f\left(x\right)+1,\left(\forall\right)x\in\mathbb{Z}.$	**2p**
	Demonstrăm prin inducţie matematică $P\left(n\right): f\left(x+n\right)=f\left(x\right)+n,\left(\forall\right)n\in\mathbb{N}^{*},\left(\forall\right)x\in\mathbb{Z}$ $P\left(1\right)$ este adevărată; Presupunem $\mathrm{P}\left(n\right)$ adevărată ; Dar $\mathrm{f}\left(x+n+1\right)=f((x+n)+1)=f\left(x+n\right)+1=f\left(x\right)+n+1\Rightarrow$ $P(n+1)$adevărată ; În concluzie $\mathrm{f}\left(x+n\right)=f\left(x\right)+n,\left(\forall\right)n\in\mathbb{N}^{*},\left(\forall\right)x\in\mathbb{Z}$ (1)	2p
	În această relaţie $x\Rightarrow x$ - $n\Rightarrow f\left(x\right)=f\left(x-n\right)+n\Rightarrow$ $f\left(x-n\right)=\mathrm{f}\left(x\right)-n$ (2) Din $(1) si (2)\Rightarrow \mathrm{f}\left(x+k\right)=f\left(x\right)+k,\left(\forall\right)k\in\mathbb{Z},\left(\forall\right)x\in\mathbb{Z}$. Luând x=0 $\Rightarrow \mathrm{f}\left(k\right)=f\left(0\right)+k;$ Pentru $k=1\Rightarrow f\left(1\right)=f\left(0\right)+1\Rightarrow f\left(0\right)=1.$ În concluzie $\mathrm{f}\left(x\right)=x+1,\left(\forall\right)x\in\mathbb{Z}$ Verificăm condiţiile problemei $f\left(x+y\right)+f\left(x\cdot y^{2}\right)=f\left(x\right)\cdot f\left(y^{3}\right)+1,\ \left(\forall\right)x,y\in\mathbb{Z}$ pentru funcţia găsită: $f\left(x\right)=x+1,x\in\mathbb{Z}$ Egalitatea devine: $x+y+1+y^{2}x+1=\left(x+1\right)\cdot\left(y^{3}+1\right)+1\Leftrightarrow y+y^{2}x=xy^{3}+y^{3}.$	2p
	Pentru x=0 şi y=2, obţinem 2=8(fals) $\Rightarrow$ nu există funcţii care să verifice condiţiile problemei.	1p

	Metoda 2. $f(x+y)+f(x\cdot y^2)=f(x)\cdot f(y^3)+1,\ (\forall)x,y\in\mathbb{Z}$ *Fie* $\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}\Rightarrow f(1)+f(0)=f(0)\cdot f(1)+1\Rightarrow$ $2+f(0)=2\cdot f(0)+1\Rightarrow f(0)=1;$ *Fie* $\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}\Rightarrow f(0)+f(1)=f(1)\cdot f(-1)+1\Rightarrow$ $1+2=2\cdot f(-1)+1\Rightarrow f(-1)=1;$ *Fie* $\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}\Rightarrow f(0)+f(-1)=f(-1)\cdot f(1)+1\Rightarrow$ $2=3(\mathit{fals})\Rightarrow$ nu există funcţii f cu proprietăţile date.	**2p** **2p** **2p** **1p**