

Olimpiada Nationala de Matematica
etapa locala- 16 februarie 2013
Clasa a X-a

Subiecte

Varianta 3

1.a) Determinați numerele reale x și y astfel încât $3^x + 3^y = 30$ și $\log_3 x - \log_3 y = -1$.

b) Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției : “ Dacă numerele reale x și y verifică egalitățile de la punctul anterior și $\log_y(x+2) + \log_y(x+10) + \log_y(x+60) = \log_y(N)$ atunci $N = 2013$ “.

(prelucrare G.M. 9/2012)

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ecuația :

$$9^{\sqrt{x}} + 9^{\sqrt{y}} + 9^{\frac{1}{\sqrt{xy}}} = \frac{81}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{xy}}}.$$

3. Fie $z_1, z_2, z_3 \in C^*$ astfel încât $z_1 + z_3 \neq 0$ și $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_2 + z_3| = |z_1|$.

Să se calculeze valoarea expresiei $\frac{z_1}{z_2 + z_3}$.

4. Fie $A_1 A_2 \dots A_n$ un poligon regulat, înscris în cercul $C(O, R)$ și M un punct în planul acestuia. Să se arate ca: $nR \leq MA_1 + MA_2 + \dots + MA_n \leq n(R + OM)$.

(G.M.volum 1 (CIX), 2012 seria A -2012)

NOTA : Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se va redacta pe o foaie separată.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală, 16 februarie 2013

Județul Argeș

Clasa a -X a

Barem de corectare V3

1. A. Condiții de existență $x > 0, y > 0$. (1 p.)

Din $\log_3 x - \log_3 y = \log_3 \frac{x}{y} = -1 \Rightarrow 3x = y$ $a, b \in R$. (2 p.)

Cum $f(x) = 3^x + 3^{3x}$ este o funcție m.s.c (deci injectivă) iar $f(1) = 30$ (1 p.)

Se trage concluzia $x = 1$ și $y = 3$ soluție unică. (1 p.)

a) Cum $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ se verifică imediat că
 $\log_3(1+2) + \log_3(1+10) + \log_3(1+60) = \log_3 2013$ deci
 enunțul este adevărat. (2 p.)

TOTAL 7p

Barem de corectare problema nr.2_V3 (prelucrare manual M. Ganga)

$x, y > 0$ 1p

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{xy}} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{xy}}} = 3 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{81}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{xy}}} \leq 27 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$9^{\sqrt{x}} + 9^{\sqrt{y}} + 9^{\frac{1}{\sqrt{xy}}} \geq 3 \sqrt[3]{9^{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{xy}}}} \geq 3 \sqrt[3]{9^3} = 27 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow 9^{\sqrt{x}} + 9^{\sqrt{y}} + \frac{1}{9^{\sqrt{xy}}} = \frac{81}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{xy}}} = 27 \quad \dots\dots\dots 1p$$

Egalitatea are loc pentru $9^{\sqrt{x}} = 9^{\sqrt{y}} = 9^{\frac{1}{\sqrt{xy}}}$ 1p

TOTAL 7p

Barem de corectare problema nr. 3_V3

Fie $\frac{z_1}{z_2 + z_3} = a + ib, a, b \in R.$

Egalitatea $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_2 + z_3|$ se scrie :

$$\left| (z_2 + z_3) \left(\frac{z_1}{z_2 + z_3} + 1 \right) \right| = |z_2 + z_3| \Leftrightarrow |z_2 + z_3| \cdot \left| \frac{z_1}{z_2 + z_3} + 1 \right| = |z_2 + z_3| \quad (2 \text{ p.})$$

și cum $|z_2 + z_3| \neq 0$, rezultă $\left| \frac{z_1}{z_2 + z_3} + 1 \right| = 1 \Leftrightarrow |a + 1 + bi| = 1$ de unde $(a + 1)^2 + b^2 = 1. (1)$

Avem $|z_2 + z_3| = |z_1| \Leftrightarrow \left| \frac{z_1 + z_3}{z_1} \right| = 1 \Leftrightarrow |a + bi| = 1$, adică $a^2 + b^2 = 1. (2) \quad (2 \text{ p.})$

Din (1) rezultă $b^2 = 1 - (a + 1)^2 \quad (1 \text{ p.})$

și înlocuind în (2) obținem $a^2 + 1 - (a + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow 2a + 1 = 0, (1 \text{ p.})$

deci $a = -\frac{1}{2}$ iar $b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Așadar, există două soluții : $\frac{z_1}{z_2 + z_3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$ și $\frac{z_1}{z_2 + z_3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}. (1 \text{ p.})$

TOTAL

7p

Barem de corectare problema nr. 4_V3

Fie xOy un sistem de coordonate cu originea în centrul O al cercului $C(O, R)$ astfel încât A_1 să aparțină axei Ox .

Notăm cu z, z_1, z_2, \dots, z_n afixele punctelor $M, A_1, A_2, \dots, A_n. (1 \text{ p.})$

În acest caz z_1, z_2, \dots, z_n sunt radacinile ecuației $z^n = R$, deci $z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0. (2 \text{ p.})$

Avem:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n MA_k &= \sum_{k=1}^n |z - z_k| = \sum_{k=1}^n |z_k| \left| \frac{z - z_k}{z_k} \right| = \sum_{k=1}^n |z_k| \left| \frac{z \cdot \overline{z_k}}{z_k \cdot \overline{z_k}} - 1 \right| = \sum_{k=1}^n |z_k| \cdot \left| \frac{z \cdot \overline{z_k}}{R^2} - 1 \right| = \\ &= R \sum_{k=1}^n \left| \frac{z \cdot \overline{z_k}}{R^2} - 1 \right| \geq R \left| \sum_{k=1}^n \left(\frac{z \cdot \overline{z_k}}{R^2} \right) - 1 \right| = R \left| \frac{z}{R^2} \sum_{k=1}^n \overline{z_k} - n \right| = nR \quad (2 \text{ p.}) \end{aligned}$$

Pe de altă parte, putem scrie : $\sum_{k=1}^n MA_k = \sum_{k=1}^n |z - z_k| \leq \sum_{k=1}^n |z| + \sum_{k=1}^n |z_k| = n(R + OM)$. (2 p.)

TOTAL 7p