Olimpiada Nationala de Matematica
etapa locala- 16 februarie 2013
Clasa a XI-a

Subiecte Varianta 3

1.Fie $A, B \in M_2(C)$ astfel încât: $AB = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$ şi $BA = \begin{pmatrix} x & 60 \\ 2 & y \end{pmatrix}$. Aflaţi *x* şi *y*.

G.M.

2.Se dă şirul (Fibonnaci) $f_1 = f_2 = 1$ şi $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

a) Să se demonstreze egalitatea:

$$f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}.$$

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{f_{n+1}^2}{f_1^2 + f_2^2 + \cdots f_n^2}}$.

prof. Ştefan Tudosie

3..Se dă şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_1 = x_2 = 1$ şi $x_{n+1} = \sqrt{nx_n + x_{n-1}}$, $n \geq 2$.A=$\{n \in N \mid x_n \in N\}$.

Să se calculeze : a) A$\cap N$ şi $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$.

Prof.*Ion Călinescu* CNDG Câmpulung

4.Să se rezolve în M_3 [Z] ecuaţia :

$$X^n - X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, k \in Z$$

Prof.*Ion Călinescu* CNDG Câmpulung

NOTA : Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se noteaza de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se va redacta pe o foaie separată.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 februarie 2013

Clasa a XI-a

VARIANTA 3

BAREM DE CORECTARE:

1. $\left.\begin{array}{ll} \det A \cdot \det B = \det(A \cdot B) & 1p \\ \det(B \cdot A) = \det B \cdot \det A & 1p \end{array}\right\} \Rightarrow xy = 200 \quad (1p)$

$tr(AB) = tr(BA) \Rightarrow x + y = 30 \quad (2p)$

$\begin{cases} x+y=30 \\ xy=200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=10 \end{cases} \quad sau \begin{cases} x=10 \\ y=20 \end{cases} \quad (2p)$

2. a) Dem prin inducție (2p)

b) Notăm $x_n = \dfrac{f_{n+1}^2}{f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2} \quad (1p)$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \quad (1p)$

Calcul $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \quad (1p)$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \quad (2p)$

SUBIECTUL 3 :

x_n > n-2 ,n$\geq$3,inductie $x_3 = \sqrt{3}$ >1 şi $x_4 = \sqrt{1+3\sqrt{3}}$ >2,P(k-1) si P(k)$\Rightarrow$P(k+1)........2p

x_n < n-1, n$\geq$3 inductie $x_3 = \sqrt{3}$ <2 ... şi $x_4 = \sqrt{1+3\sqrt{3}}$ <3, P(k-1) si P(k)$\Rightarrow$P(k+1)...2p

n-2< x_n < n-1, $\Rightarrow$ $x_n \notin N$, n$\geq$3 $\Rightarrow$ A$\bigcap N = \{1,2\}$...1p

$\frac{n-2}{n} \leq x_n \leq \frac{n-1}{n}$..”..1p

Finalizare,(criteriul clestelui,) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$ = 1..1p

SUBIECTUL 4:

Inmulţeşte la stânga şi la dreapta cu X şi obţine AX = XA……………………………1p

X=$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 2b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ a,b,c ⊑ Z ……………………………………………………………1p

X=a $I_3 + B$, B=$\begin{pmatrix} 0..b....c \\ 0..0..2b \\ 0..0....0 \end{pmatrix}$, $B^k = O_3, k \geq 3$ ………………………………………………1p

X=$a^n I_3 + n a^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} B^2$ ………………………………………………………1p

$a^n - a = 0, b(na^{n-1} - 1) = 1, nca^{n-1} + n(n-1)a^{n-2}b^2 - c = k, a, b, c \in Z \Rightarrow$ a=0,b= - 1,c= -k…2p

Finalizare X=$\begin{pmatrix} 0...\_1...\_k \\ o......0...\_2 \\ 0......0.......0 \end{pmatrix}$ ……………………………………………………………1p