OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală 28.02.2015
CLASA a XII-a

Subiectul 1 (7 puncte)

1. Fie (A, +, ·) un inel cu două elemente fixate $a, b \in$ A cu proprietăţile

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2,\ (a+b)^3 = a^3 + b^3$$

Să se arate că $(a+b)^{2015} = a^{2015} + b^{2015}$.

(Marin Marin, prof. univ. habil. dr.)

Subiectul 2 (7 puncte)

2. Să se calculeze: $\int \frac{e^x(x-2)}{x(x^2+e^x)}dx$, $x \in (0,\infty)$

***

Subiectul 3 (7 puncte)

3. Fie $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx,$ $n \in \boldsymbol{N}$.

a) Să se arate că I_n este o funcţie descrescătoare de n

b) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n-2}}$ şi $\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n-1}}$

***

Subiectul 4 (7 puncte)

4. Matricea pătratică $A(a_{ij})$, de ordinul n, are proprietea

$$\frac{1}{m^n}\begin{vmatrix} a_{11}+m & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+m & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+\frac{1}{m} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+\frac{1}{m} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+\frac{1}{m} \end{vmatrix}$$

egalitatea având loc pentru cel puţin $n+1$ valori distincte ale lui $m \in \boldsymbol{N}^*$.

Să se arate că determinantul matricei A are valoarea 1.

(Marin Marin, prof. univ. habil. dr.)

***

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Punctajul minim de calificare la etapa judeţeană a olimpiadei de matematică este de 14 puncte.